

Cas.

A

2837

Die Theorie
der
Parallellinien

nebst dem
Vorschlage ihrer Verbannung
aus der Geometrie,

von
D. *Ferdinand Carl Schweikart.*

Mit ~~sechs~~ Kupfer Tafeln.

Jena und Leipzig,
bey Christian Ernst Gabler
1803.

Die Theorie
7282 A. 12

der

Parallelen

nebst dem

Vorlesung ihrer Verbindung

aus der Geometrie

von

Schweizer

D. Erd



E i n l e i t u n g.

I.

Als zu dem Satze von der Gleichheit des Quadrats der Hypothenuse mit den Quadraten der Catheten, *Pythagoras* den Beweis gefunden hatte, ward zur Feyer der Erfindung, — so sagen Einige, — eine Hetakombe geopfert; dem Erfinder aber hat die Sprache ein dauerndes Denkmal errichtet.

Dieses glänzenden Vorgangs ohngeachtet hat sich um die verwandte und eben so durch alle Zweige der Geometrie verwebte Lehre von den Parallellinien, noch keiner so viel wir wissen, ein gleiches Verdienst erworben, ob es gleich gewiss ist, daß schon die Nationen des Alterthums und besonders die Griechen sich emsig darum bemühten. Denn daß diese, — und namentlich *Euclides*, — um der Schwierigkeit auszuweichen, ein Theorem als Grundsatz aufgestellt haben sollten, kann nur

A der

der glauben, der ihren Geist und ihre Achtung vor der Wissenschaft verkennt. Es übersteigt vielmehr das Wahrscheinliche, daß *Euclides* das Zusammenreffen der Linien, deren Abweichung von einer dritten Querlinie, weniger als einen halben Cirkel beträgt, als Lehrsatz nach dem 28ten Satze des ersten Buchs zu beweisen versucht habe *). Inzwischen

*) *Clavius* in seinen Scholien zu den Elementen (ad Lib. I. propof. 28.) erzählt, daß in Rom jemand eine arabische Ausgabe besessen habe, worin das 11te Axiom als Lehrsatz in dieser Ordnung gestanden haben soll; allein der Besitzer habe sie ihn, seiner wiederholten dringenden Bitten ohngeachtet niemals sehen lassen.

Was von andern Mathematikern. z. B.

Montucla histoire des mathematiques P. I. p. 221.

Kästner Geschichte der Mathematik Th. 1. S. 253.

Hauff Lehrbegriff der reinen Mathematik Th. 1. B. 1. Frankfurt 1803. S. 188.

von dieser Ausgabe gesagt wird, gründet sich auf diese Autorität. Doch erzählt auch

Dechales cursus seu mundus mathematicus. T. I. de progr. math. pag. 12.

daß sich in der Bibliothek der Jesuiten zu Paris ein arabischer *Euclid* befinde, in welchem der 11te Grundsatz, den Figuren nach zu urtheilen, bewiesen sey.

Castillon in seinem zweyten Memoire über die Parallellinien S. 202. 203.

Mémoires de l'Academie royale des Sciences et belles-lettres, depuis l'avènement de Frédéric Guillaume II. au throne 1786—87. à Berlin 1792. premier mémoire sur les paralleles d'Euclide, par Mr. de Castillon. p. 233 f.

de

schen läßt es sich schon aus der Stelle, die dieser Beweis einnimmt, errathen, daß er der Evidenz
A 2 der

de 1788 — 1789. à Berlin 1793. second mémoire
171 f.

glaubt, *Euclid* habe den Beweis so geführt:

- 1) in jedem Dreyecke sind je zwey Winkel kleiner, als zwey rechte Winkel, (I. 17.) folglich
- 2) wenn zwey Linien von einer dritten geschnitten werden und es sind die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel eben so groß, oder größer, als zwey rechte Winkel; so ist es unmöglich, daß sie an dieser Seite zusammen-
treffen;
- 3) sind sie aber kleiner, so ist es nicht unmöglich.
- 4) Mithin wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden; so sind die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten Winkeln gleich, denn ausserdem wäre es nicht unmöglich, daß die Linien zusammen-
träfen, da doch Parallellinien eben solche Linien sind, bey welchen dies unmöglich ist.

So hat *Euclid* gewiß nicht geschlossen. —

Man könnte dies *Raisonnement* folgendergestalt parodiren:

- 1) In jedem Dreyecke sind je zwey Seiten zusammen-
genommen größer, als die dritte (I. 20.), folglich
- 2) wenn von den drey Linien (Fig. 1. c.) EB, EF, FD; BE, + DF gleich, oder kleiner, als EF sind, so können EB, FD nie zusammentreffen, dahingegen
- 3) wenn $BE + DF > EF$ so ist es nicht unmöglich daß sie ein Dreyeck bilden und also zusammen-
treffen.

4) Mithin

der übrigen ermangelt und dadurch die spätere Verletzung unter die Grundsätze verwirkt habe.

Dem sey nun, wie ihm wolle, so ist soviel bekannt, daß es auch nach zweytausendjährigem Bemühen noch keiner Beweisart gelungen ist, sich allge-

- 4) Mithin wenn AB der CD parallel ist, so ist (Fig. 1. e.) $FE \nmid BF + DE$, denn ausserdem wäre es nicht unmöglich, daß FB, ED zusammentrafen etc.

Diese Parodie wird klar machen, worin der Fehler liege, nämlich, daß aus der bewiesenen Unmöglichkeit in einem Falle, auf die Möglichkeit in allen andern Fällen zu voreilig geschlossen worden ist.

Was das 11te Axiom eigentlich sey, darüber sind die Meynungen so verschieden, als sie nur seyn können.

Peletarius (in *Elementa Geometr. Demonstr.* §. 5.) ist geneigt, es für eine Definition auszugeben.

Reirard (les élémens de Géométrie d'Euclide. Paris XII. (1804) p. 6.) versichert, es befinde sich in einigen Handschriften unter den Forderungen. Von der arabischen Uebersetzung, welche *Campan* lateinisch herausgegeben hat, und von andern gedruckten Ausgaben ist dieß bekannt.

Savile, dessen Worte *Castillon* a. a. O. premier mémoire p. 247. anführt, meynt, es sey die unmittelbare Schlussfolge aus dem Satze, daß in jedem Dreyecke zwey Winkel stets kleiner, als zwey rechte seyen, oder mit andern Worten, daß zwey zusammenstossende Linien, mit einer dritten, die sie schneidet, solche Winkel bilde, welche zusammen genommen kleiner seyen, als zwey rechte Winkel. Dagegen schließt *Geminus* (der etwa in der 168ten Olympiade lebte, *Saxii Onomasticon*. Tom. I. Art. *Geminus* pag. 146.) eben weil dieß bewiesen werde, so müsse auch der umge-

allgemeinen Beyfall zu erwerben, ob es gleich schon vor 40 Jahren möglich war, 28 Versuche von bedeutenden Mathematikern, von ungleichem Gehalte zwar, zu sammeln *), und seit dieser Zeit eine gleiche Zahl von *Bertrand*, *Lambert*, *Karsten*, *Hindenburg*, *Schulz*, *Bendavid*, *Gensichen* **), *Voigt*, *Castillon*, *Rehbein*, *Ebert*, *Hauff*, *van Swinden*, *Le Gendre*, *Schwab*, *Hofmann*, *Fischer*, *Schmidt*, *Jacques* ***) und andern die Lösung des Knotens vergebens

umgekehrte Satz, welcher durch das vermeynte Axiom ausgesprochen werde, gleichfalls ein Lehrsatz seyn.

P. Ramus Schol. math. Lib. VII. pag. 159.

Mögte doch *Savile* seinen Schluss verglichen haben, mit dem seines Freundes *Franc. Fabritius Dalmata*, von dem er (*Praelectiones* XIII. in principium elementorum Euclidis Oxonii habitae 1620. in praelect. 8.) erzählt, er habe eine neue Geometrie aufführen wollen und nicht blos, daß alle rechte Winkel gleich seyen, unter die Axiome gesetzt, sondern auch, daß alle gleiche Winkel rechte seyen, denn dieß sey der umgekehrte Satz von jenen. Uebrigens erklärt *Savile* in diesem Buche das 11te Axiom für das 5te Postulat, was obige Aeufserung aufzuheben scheint. Vergl. *Kästner* a. a. O. Th. 3. S. 19 folg.

*) *Klügel* conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstr. recensio. Goettingae 1765.

**) Folgende, gegen einige dieser Versuche erschienene Schrift verdient erwähnt zu werden:

(*Anders?*) Bemerkungen über einige Theorien der Parallelen, gegen *Schulz*, *Gensichen* und *Bendavid*. Libau 1796.

***) Ob *Jacques* demonstration simple et directe des propriétés des parallèles rencontrées par une sécante (1804.) 8.

wirklich

bens erwarten ließen, so daß *Kästner* vor vielen Jahren schon, an der Möglichkeit der Lösung verzweifelnd, mit unbegreiflicher Resignation, anstatt nach der wahren Demonstration zu forschen, ein blindes Annehmen öffentlich anrieth.

Wer nun den Gegenstand für so verwickelt hielte, daß er darin den Grund von dem bisherigen Mislingen suchen sollte, den wird es wohl befremden, wenn er sehen wird, daß ich die Schwierigkeit zu heben, einen Weg einschlage, auf dem keine neue Wahrheiten erfunden, sondern die bekannten nur auf eine andere Weise verbunden werden sollen. Befremden wird es ihn, daß nicht, wie Einige für nöthig hielten, ein neues Feld für die Geometrie erobert, sondern blos auf eine ungekünstelte Manier von den gewohnten Kunstgriffen Gebrauch gemacht worden ist; so daß das Allen Bekannte, in einer besondern, jedoch ganz einfachen Verkettung vor die Augen gebracht wird.

wirklich erschienen sey, davon weiß ich nichts zu sagen, denn ich habe sie eben so wenig erhalten können, als die neueste Darstellung von *Le Gendre*.

Le Gendre nouvelle théorie des parallèles, avec un appendice cont. la manière de perfectionner la théorie des Parallèles. 1803. 8.

II.

Die bisherige Darstellung des Parallelismus erlag, wie ich glaube, einem dreyfachen Mißverständnisse, das sich auf die Methode, auf den Ausdruck und den Umfang dieser Lehre gründet.

Um zur wahren Wissenschaft vorzudringen, wenn dieß anders möglich ist, muß es dem Menschen zur klaren Erkenntniß geworden seyn, wie alles dem Wesen nach, in eins zusammenfließe, denn wenn das Wissenschaftliche sich dadurch charakterisirt, daß alles Wahre aus der Uridee entwickelt wird, die Darstellung hingegen nur die Nachbildung des Universums ist; so muß in diesem auch die Einheit alles Mannichfaltigen Correlat seyn und letzteres in jeder andern Hinsicht bloß dem Scheine angehören. Daß dem so sey, das wäre denn die erste Wahrheit selbst.

Die Urwahrheit erscheint in mannichfaltigen Formen, davon jedoch liegt nicht in ihr der Grund. Es ist historisch nur, daß ihr noch neben ihrem Wesen eine besondere Form für den endlichen Geist eigenthümlich sey. Doch es ist das Geschäft der Wissenschaft diese Form in der wahren Gestalt darzustellen, so nämlich, daß sie nicht für etwas anderes gehalten werde, als sie wirklich ist, nicht also für das, was sie zu seyn scheint. Sie muß von ihr, da sie der Einheit nicht wesentlich ist, bloß hypothetisch sprechen. Nicht als das Absolute stellt sie sie dar, vielmehr erwähnt sie ihrer nur, als einer Möglichkeit und zeigt von ihr, wie, wenn sie *ist*, sie dann beschaffen müßte seyn.

Dieß ist der Typus, der sich in der Wissenschaft im Ganzen, wie im Einzelnen ausspricht.

In

In das Wesen wird erst hypothetisch aufgenommen, was an dasselbe soll gekettet werden und indem die Construction Bestimmtheit an Bestimmtheit knüpft; so muß die Demonstration sie nun dadurch in Harmonie zu setzen suchen, daß sie sie auf *eine* Form, auf die des Bestimmtheits, zurückführt. Gelingt dies, so beweist sie dadurch, daß, was bloß Voraussetzung war, dem Absoluten nicht fremdartig sey, da es dieses, die Einheit, in sich aufzunehmen geschickt ist *).

So wie es aber *verschiedene* Wissenschaften nur deswegen gibt, weil man des Absoluten Pole festhält und nun diese als es selbst zu behandeln sucht, so hat denn auch die Geometrie ihre eigene Sphäre. Es ist der grenzenlose Raum. Für sie, so wie es jetzt noch mit ihr steht, ist des Bestimmtheits Urform, die unbegrenzte gerade Linie, die, wie schlechthin gefodert wird, obschon als *wirklich* immer endlich, dennoch der Möglichkeit nach, an Unendlichkeit, ihm, dem Raume entsprechend gedacht werden muß. Auf diese wird nun jede Construction zurückgeführt und so z. B. von der Beschränkung ersten Art, dem Dreyecke, gezeigt, daß wie auch nur die Linie gebrochen möge seyn, um die drey Grenzen darzustellen, die Summe aller Abweichungen gleich 180 Graden seyn und solchemnach die gerade Linie vollkommen wieder hergestellt werde. Wenn aber andere Figuren zwar durch Dreyecke gemessen werden; so heißt dies doch

*) *Schwabs Ansicht* stimmt hiermit vielleicht mehr, als sein Ausdruck überein, wenn er

Tentamen novae parallelarum theoriae. Stuttg. 1801.
pag. XXII.

sagt: Axiomata omnino praestruuntur, ut theoremata inde possint deduci: ex nihilo enim nihil conficitur.

doch nichts anders, als dafs sie auch, als gerade Linien zu betrachten seyen.

Dieselbe Forderung ergeht auch an die Parallelen, wenn anders sie, für sich bestehende Gestalten sind. Doch dem genügt nicht des Jesuiten *Paradies* — den *Wolf* mit Achtung nennt *), — wunderliche Ansicht, wenn er sie für die Seiten eines breiten Strichs (des Lineals, wie er sagt) ausgibt **).

Wovon man den Charakter der geraden Linie nicht demonstrieren kann, gehört in *diese* Wissenschaft auf keine Weise. Es ist dies ihr Gepräge und wo sich's findet, da ist auch ihr Gebiet. Hingegen kann man nicht verlangen, den stetigen Uebergang von einem Satze zu dem andern, in jedem Falle nachzuweisen, bevor man die Geometrie vollendet aufgebauet hat.

Es verhält sich mit der Wissenschaft, nach dem Auspruche eines grossen Philosophen, wie mit dem Kunstwerke, das in die Tiefe des Meers versenkt, nicht aufhört ein Werk der Kunst zu seyn. Ein jeder Satz derselben, auch wenn er unverstanden, oder völlig unbekannt bliebe, ist dennoch wahr und hat Anspruch auf die Stelle, die ihm durch das Ganze bestimmt ist. Die schöpferische Kraft selbstständiger Geister, getrieben von der Idee des Ganzen, entdeckt sie, die neuen Gestalten und legitimirt sie durch die Demonstration, damit sie auch von dem, der blos nachbildet, verstanden werden. Was in der Construction dem äusseren Sinne verborgen

*) *Wolf* kurzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schriften. Frankf. und Leipzig 1744. S. 21.

**) *Ign. Gaston Paradies* oeuvres de mathematiques. Amst. 1725. 8. élémens de Géométrie. p. 11.

bergen bleibt, enthüllt also die Reflexion, durch das, was man beweisen nennt. Wo aber dies nicht anders, als durch Mittelsätze möglich ist, bereiten Theoreme die Lösung des Aufgegebenen vor. Kein Lehrsatz bildet etwas Ganzes, in andern muß er seine Ergänzung suchen, die gleicherweise auf *eine* Aufgabe sich beziehen, ob diese gleich oft unausgesprochen bleibt und bleiben kann. Da nun die Demonstration, das, was nur hypothetisch construirt ward, der Reflexion in kategorischer Gestalt wieder gibt; so ist im einzelnen Theorem die Hypothese auch zum Theile nur als wirklich affirmirt und es enthält sonach Bestimmungen, die selbst nach dem Beweise bloß angenommen bleiben, weshalb es andern Sätzen vorbehalten ist, auch diesen die erwartete Realität zu geben.

So findet man, um eins nur anzuführen, noch ehe gelehrt wird, ein Dreyeck zu erbauen, von solchen, in welchen zwey Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gleich sind, die Congruenz erwiesen, auch leistet der Beweis, was er verspricht, allein die Existenz von Dreyecken, in denen sich die Eigenschaften fänden, die angenommen worden sind, muß immer noch als zweifelhaft betrachtet werden und wird erst dann gewiß, wenn wir im Stande sind, zwey Bilder dieser Art, mit Linien darzustellen.

So wenig dies Verfahren nun, in mehrere Glieder zu vertheilen, was doch zu einem sich verbindet, die Evidenz vermindert; so ist doch nirgends weniger Gebrauch von ihm gemacht worden, als in der Theorie der Parallelen.

Die Aufgabe, Parallelinien zu ziehen, ist verstanden die, zwey Linien zu entwerfen, von welchen es sich zeigen lasse, daß *jede* Linie, die sie schnei-

schneidet, mit ihnen solche Winkel bilde, die sich verwechselt decken.

Die Lösung, die *Euclid* schon gab, daß man die beyden Linien auf eine dritte so hinzieht, daß alle Wechselwinkel, die sie mit dieser machen, von gleicher GröÙe sind, setzt als bewiesen schon voraus, daß wenn von *einer* Linie dies anzunehmen sey, auch jeder andern, die beyde Parallelen schneidet, dieselbe Lage zugeschrieben werden müsse und eben dieses ist's, was keinem noch gelingen wollte.

Wie konnte es anders kommen, da man es völlig unterlieÙ, den eben angeführten Satz in mehrere zu zerfällen und diese Beschaffenheit erst von solchen zu erweisen, von welchen man angenommen hätte, daß sie von *zwey* Linien auf diese Weise geschnitten würden, wodurch denn freylich die angeblichen Parallelen, als Seiten des Parallelogramms erschienen wären. Alsdenn aber würde man sich, wie mir es scheint, im Stande gesehen haben, Wahrheiten festzusetzen, durch welche der Beweis des allgemeinem Satzes genugsam wäre vorbereitet worden.

Da die Wissenschaft die völlige Umkehrung der empirischen Ansicht ist, so ist der Weg von dieser, die uns ganz ohne unser Zuthun eigen ist, zu jener die ein freyes Erheben des Geistes voraussetzt, durch Propyläen angedeutet. In diesen erblicken wir das Streben, in dem Historischen zuerst die Einheit aufzufinden und dieses heißt *Critik*, sodann dasselbe als Glied eines organischen Ganzen, ohne es zuvor in die Idee dieses Körpers schon aufgenommen zu haben, darzustellen, welches Verfahren Einige im Sinne zu haben scheinen, wenn sie vom *transcendentalen Idealismus* sprechen.

Betrachten wir die Parallelen critisch, oder idealistisch, so muss das vorhin gefundene Resultat seine Bestätigung erhalten, wenn wir anders nicht Irrthümer für Wahrheit angesehen haben.

A. Critisch.

In der Geometrie, nach ihrem gegenwärtigen Zustande, critisiren, heisst, von Constructionen untersuchen, inwiefern sie als aus der geraden Linie entstanden betrachtet werden können.

1) Von der geraden Linie AD (Fig. 1. a.) schneide man drey gleiche Stücke, AB, BC, CD ab.

2) Die CD lasse man um einen beliebigen Winkel DCd von ihrer Richtung abweichen, so dass der Punkt D den Bogen Dd beschreibe.

3) Unter dem gleichen Winkel CBc erhebe man die BC über AD, so dass der Punkt C den Bogen Cc = Dd erzeuge.

4) Beydes geschehe in demselben Moment, dass also C in c anlange, wenn der Bogen Dd vollendet ist, alsdenn hat D die krumme Linie DE beschrieben, da in gleicher Zeit das Centrum C nach c fortgerückt ist und D in F fallen würde, hätte es nicht eine eigene Bewegung gehabt. Es lässt sich aber unwidersprechlich darthun, dass DE ein, Cc vollkommen gleicher Cirkelbogen aus C mit der Weite CD sey, welches hier weiter auszuführen überflüssig ist.

5) Alsdenn aber ist $cE = Cd = CD = CE = BC = Bc$ und $ECD = cBC$.

6) Man

6) Man hat nun Parallellinien AD , cE , denn die Wechselwinkel EcB , cBA sind sich gleich, indem $DCd = cBC$ (5.) und $\left\{ \begin{smallmatrix} dCB \\ EcB \end{smallmatrix} \right\} = cBA$.

7) Nun fällt es sogleich in die Augen, daß $BCEc$ ein Parallelogramm sey, da die Seiten alle gleich sind (6.) und daher $\Delta cEC = \Delta cBC$, $cEC = cBC$ u. s. w.

Wenn aber solchergestalt die Entstehung der Parallelen auf das Parallelogramm führt; so muß die Wissenschaft umgekehrt von diesem ausgehn, wenn sie von jenen sprechen will, wie sich oben schon aus der Reflexion auf die Methode ergab.

B. Idealistisch.

Die Ansicht des Menschen, als eine Welt im Kleinen, ist alt und wahr. In ihm drückt sich derselbe Organismus des Absoluten aus, wie in den Univerfum, nur in der eigenthümlichen Form der Selbstthätigkeit. Wer den endlichen Geist durchschaut, gelangt daher leicht zu der klaren Erkenntnis des Ganzen und die Wissenschaften, insofern dieß ihr letzter Zweck ist, finden an dem transcendentalen Idealismus, der eben das Univerfum als Selbstthätigkeit construirt, ein Vorbild, das sie nur mit ihren Eigenthümlichkeiten zu verschmelzen brauchen, um zu ihrer Vollendung sicher fortzuschreiten.

Man hat dieß geahndet, als man versuchte, nicht sowohl aus der Construction, als aus der produktiven Thätigkeit des Geistes, — dem Construiren — zu folgern und dadurch veranlaßt ward, den Begriff der Bewegung in die Geometrie einzuführen,

führen, wogegen diese sich mit vollem Rechte sträubt.

Inzwischen gab dieß Verfahren ohne Schwierigkeit eine Demonstration an die Hand, wodurch man die der Parallelentheorie gemachten Einwürfe, auf die Seite geräumt zu haben glaubte.

So errichtete man *) (Fig. 1. b.) die gleichen CA, DB auf die AB lothrecht, zog die CD und versicherte, daß der Punkt C die CD beschreibe, wenn man die CA ohne Veränderung des Winkels CAB nach B fortbewege, da sonst C auf einer andern geraden Linie CED fortgehn müßte und daher von zwey geraden Linien CED, CD ein Raum eingeschlossen würde, welches unmöglich sey. Alsdenn aber falle C in G, wenn A nach F gelange und $FG = AC$. Demnach sey ein jedes, auf der AB errichtete und bis auf die andere Seite CD verlängerte Loth, den Seiten AC, BD gleich. Von diesem Satze aus, ist alles, was den Parallelen eigen ist, leicht zu entwickeln.

Hierbey hatte man nur vergessen, daß diese Methode keinen andern Werth hat, als den, zu der wahren wissenschaftlichen Form hinzuleiten, denn um von der Wahrheit der bekannten Eigenschaften der Parallelen zu überzeugen, bedarf es großer Zurüstungen im mindesten nicht. Man zeige wenn man will, daß (Fig. 1. c.) $BEF + DFE = 2R$ und

*) *Demonstratio theorematis parallelorum.* Hamburgi. 1799. Ich wähle das Beyspiel aus diesem Schriftchen, weil es nicht in den Buchhandel gekommen zu seyn scheint. Jedoch ist der Fall nicht wörtlich entlehnt, sondern, was in mehrere Sätze zerstreut ist, seinem Geiste nach zusammengezogen und paßt daher auch auf andere Darstellungen, z. B. auf die des *Clavius*.

und mithin $AEF + CFA = 2R$, dafs also AB und CD der Linie EF auf einer Seite näher, als auf der andern find; so wird er, wie auch der Graf *Candalla* dafür hält, fest behaupten, dafs AB, CD auf jener Seite sich immer näher kommen und endlich auch sich schneiden. Daran zu zweifeln, wäre das, was er nicht fassen würde.

Eben so unbedingt wird er dem *Ptolemäus* bestimmen, dafs von zwey, (Fig. 1. e.) in gleicher Entfernung fortlaufenden Linien, das Verhältnifs in jedem Punkte dasselbe scheinen müsse, man möge sie von der Rechten nach der Linken, oder umgekehrt betrachten und dafs demnach, so viel sie nach der einen Richtung hin, von einer dritten Linie, die sie schneidet, abweichen, — was durch die Summe der Winkel EFB, FED bestimmt wird, — ebensoviel die Summe der Abweichung nach der andern Richtung hin, (EFA + FEC) betragen müsse.

Darum ist es fast unbegreiflich, das Benehmen derer, die, um einen so einleuchtenden Satz der Demonstration zu unterwerfen, entweder ganz fremdartige Begriffe, wie von unendlichen Flächen der Winkel, einmischen, oder ein anderes Axiom an die Spitze stellen *), das weit nachsteht an Evidenz und Simplicität dem *Euclidischen*.

Hier

*) Diefs geschieht theils ausdrücklich, theils stillschweigend. Letzteres ist z. B. der Fall bey der, mit grossen Mängeln überfüllten Darstellung des Herrn *Rehbein*

I. H. E. *Rehbein* Versuch einer neuen Grundlegung der Geometrie. Göttingen 1795.

Dieser läßt es sich nachweisen, dafs man ihr ausser vielen andern, vorzüglich folgende Voraussetzung zugeben müsse:

wenn

Hier gilt es einzig der äussern Form der Wissenschaft, und will man denn das Construire selbst der Betrachtung unterwerfen; so kann es in der einzigen Absicht nur geschehen, den Punkt der Construction vergleichend auszurechnen, der für die Reflexion der erste ist und dem auch in der Geometrie nicht minder das Primat gebührt. Denn aber hätte man vor allen Dingen fragen müssen, *wie* kommt der Geist dazu, sich Parallelen zu erdenken? Doch hiervon schweigt ein jeder still, wenn auch *bewegte* Punkte der Schwerpunkt seiner Ansicht waren.

Die Beantwortung dieser Frage wäre die Nachweisung eines Uebergangs von den ersten Momenten Selbstthätigkeit auf Parallellinien und um diesen anzudeuten, sey folgendes gesagt:

Nicht anders kann die Absolutheit der endlichen Vernunft aufgefaßt werden, denn als Einheit zweyer Thätigkeiten die nach gerade entgegengesetzten Richtungen sich äussern, einmal als beschränkend, alsdenn als vernichtend die Beschränkung. Wenn aber das, was jede Grenze überschreitet, von neuem die Beschränkung setzt, so hebt es diese auch nicht völlig auf und ist nur die Erweiterung der Schranken.

Daher

wenn die gleichgrossen geraden Linien AB, BD, DE (Fig. 1. g.) unter den gleichen Winkeln ABD, BDE zusammengefügt werden; so laufen sie gleichsam in sich selbst zurück, so nämlich, daß diese Linien endlich (EF) die entgegengesetzte Richtung annehmen und zuletzt (IK) der ersten wieder folgen, wodurch es denn geschieht, daß eine derselben (EF) die Linie AL, wenn sie, so weit als nöthig ist, verlängert wird, berühren oder schneiden muß.

Daher wird auch das Dreyeck, als Ausdruck der Begrenzung nicht ganz vernichtet, es werden nur von seinen Seiten zwey getrennt und durch die vierte Linie in ewiger Entfernung gehalten.

Betrachten wir diesen Act, als Aufhebung der Begrenzung; so haben wir Parallellinien. Betrachten wir ihn, als Erweiterung der Grenze; so entsteht uns das Parallelogramm. Beyde Betrachtungen sind einseitig, da jede nur die eine Seite der Selbstthätigkeit darstellt. Das Parallelogramm, als begrenzte Figur, als Inhalt, kann nicht ohne die Seiten und umgekehrt die Parallelen können nicht ohne den Inhalt erkannt werden. Der Punkt, wo beyde in eins zusammenfließen, ist der Winkel und daher muß auch jede Darstellung der Parallelogramme, wie der Parallellinien von den Winkeln der vierseitigen Figur, oder von denen des Dreyecks, dessen Verdoppelung jene ist, ausgehn.

Diefs hat schon der Perfer *Nasser-Eddin* *) und nach ihm mehrere, wie ihre Versuche beweisen,
ein-

*) *Castillon* second mémoire p. 175 f. *Kästner* a. a. O. Th. 1. S. 375 folg. *Klügel* (l. c. §. IX.) vermuthet, daß *Nasser-Eddins* Beweis eben der sey, welcher in der arabischen Handschrift, deren *Clavius* erwähnt, (siehe oben) dem *Euclid* zugeschrieben werde. *Castillon* hat gar nicht daran gezweifelt. Diefs vorausgesetzt müßte man entweder annehmen, *Nasser-Eddin* habe bloß den, von *Euclid* geführten Beweis wiederholt, oder wiederhergestellt; oder der dem Griechen zugeschriebene Beweis, sey nicht von demselben, sondern von *Nasser-Eddin*, der ihn zur Ergänzung eingeschoben habe. Jenes kann nicht seyn, denn der Perfer gibt seinen Beweis ausdrücklich für seine Erfindung aus; und dieses ist nicht wahrscheinlich, denn *Clavius*, dem die Darstellung des baktrischen Mathematikers
B nicht

eingesehen und *Hauff* *) am bestimtesten ausgesprochen, ob man gleich seinen Beweis für die Summe der Winkel im Dreyecke, nicht als befriedigend betrachten kann, welches freymüthige Urtheil am wenigsten bey diesem vortreflichen Manne einer Entschuldigung bedarf, da sein der Wissenschaft so ganz geweihtes Leben den erfreulichen Anblick eines, alle äusseren Zwecke verachtenden und nur von dem Eifer für Wahrheit beseelten Gemüths gewährt.

Die Demonstration, die er zuletzt **) uns gab, ist diese:

Um

nicht unbekannt seyn konnte, da dessen Ausgabe des Euclids zu seinen Lebzeiten (Rom 1594) und zwar an seinem Aufenthaltsorte, im Druck erschien, wiederholt noch in der Ausgabe seiner Scholien von 1607 (vielleicht ist aber diese ohne sein Wissen veranstaltet worden,) die Klage, den Euclidischen Beweis nie gesehen zu haben. *Clavius* starb d. 6. Febr. 1612.

*) a. a. O. S. 163 folg.

**) Herr Professor *Hauff* in *Marburg* hat vier Versuche, die Schwierigkeiten der Parallelentheorie zu heben, bekannt gemacht,

- 1) Progr. quo duas vexatissimas matheseos purae elementaris theorias enodare inque luce dudum desiderata collocare conatur *I. C. F. Hauff* *Marburgi* 1793.
- 2) *Hindenburg Archiv der Mathematik* v. J. 1799. Heft 9. Abh. VI.
- 3) Ebendaf. Heft 10. Abh. IV.
- 4) In dem angeführten Lehrbuche S. 155 folg.

Da die frühern Versuche zum Theile schon widerlegt sind und er selbst sie so gut, als aufgegeben hat (a. a. O. S. 167.), so erwähne ich nur des neuesten

a. a.

Um zu beweisen, daß in jedem Dreyecke die drey innern Winkel zusammen zwey rechten gleich sind, bringe man (Fig. 1. i.)

1) das $\triangle ABC$ in eine solche Lage, daß dessen kleinster Winkel ACB zur rechten Hand falle.

B 2

2) Hal-

(a. a. O. S. 155 folg.). Was namentlich die Abhandlungen im *Hindenburgischen* Archiv betrifft; so ist dagegen erschienen:

I. I. Hoffmann Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der Parallellinien. Nebst einer Widerlegung des Hauff'schen Versuchs einer Berichtigung der Euclidischen Theorie der Parallelen. Offenbach. 1801.

Was Hoffmann aber an die Stelle setzt, ist nicht minder unbefriedigend. Zuerst will er beweisen, daß wenn $DOB = R$ (Fig. 1. d.) und $QDO \perp R$ und aus beliebigen Punkten der Linie OP lothrechte Linien auf die BC gefällt werden, diese immer kleiner werden, je näher die Punkte gegen Q — und größer, je näher sie gegen P liegen.

Er läßt zu dem Ende aus O ein Loth OM auf QP fallen, welches nothwendigerweise links von D zu liegen kommt, so ist $DO \angle MO$, da $OMD = R$, der größere Winkel ist. Ingleichen ist das Loth MN aus M auf die Linie BC , kleiner als MO , da MO dem rechten, also dem größern Winkel gegenüberliegt und eben so ist das Loth NA aus N auf die QP kleiner, als MN und größer als die aus A auf BC senkrecht gezogene Linie AV etc. woraus denn folgt, daß $DC \angle MN \angle AV$ etc.

Nimmt man nun in der Linie QP einen beliebigen Punkt E an und zieht die EF auf BC vertical, so ist $EF \angle MN$ $\angle DO$, denn da $OME = R$, so ist $FME \angle R$ und $EF \angle MF$, aber $MF \angle MN$, da diese Linie dem rechten Winkel bey N gegenüberliegt und daher um so mehr $EF \angle MN$. Ferner da OED , dem rechten Winkel

2) Halbire man die Seite BC in dem Punkte D, ziehe die AD, und verlängere sie, bis $DE = AD$, hierauf ziehe man die BE, CE.

3) Nun halbire man die Seite CE in dem Punkte F, ziehe die BF und verlängere sie, bis $FG = BF$, alsdann verbinde man die EG, CG.

4) Man halbire die Seite CG in dem Punkte H, ziehe die EH, und verlängere sie, bis $HI = EH$, und verbinde sofort die GI, CI.

5) Sodenn halbire man die Seite CI in dem Punkte K, ziehe die GK und verlängere sie, bis $KL = GK$, alsdann verbinde man die IL, CL.

6) Endlich halbire man die Seite CL in dem Punkte M, ziehe die IM, verlängere sie, bis $MA = IM$ und ziehe zuletzt noch AL.

Beweis.

Winkel OMD gegenüberliegt, so ist $OED \perp R$ und daher $DO \perp EO$, aber $EO \perp EF$, um so mehr also $DO \perp EF$. (Damit ist Kästners Einwurf a. a. O. Th. 1. S. 377. gehoben.)

Indessen hätte er dieses Verhältniß auch von der senkrechten Linie XY zeigen müssen, wenn der Satz von dem allmählichen Abnehmen der Lothe in der Allgemeinheit, in welcher er ihn anwendet, für bewiesen gehalten werden soll, denn man kann nicht behaupten, daß, wenn man fortfährt, von QP auf BC und von BC auf QP, auf die beschriebene Art senkrechte Linien zu ziehen, die XY einmal erreicht werden *müsse*, da ja die Abstände DM, MA etc. immer kleiner werden. Aber eben in der Schwierigkeit, dieß zu leisten, die sich in der Folge auf ähnliche Weise wiederholt, liegt die Auffoderung, die Demonstration auf eine durchaus begrenzte Figur einzuschränken. Wie sehr übrigens diese Darstellung mit mehreren ältern übereinstimme, braucht nicht erst bemerkt zu werden.

Beweis.

1) Da (p. constr.) $AD = DE$, $BD = DC$ und $ADB = CDE$; so ist $ABC = BCE$ und $AB = CE$; folglich, da auch $BC = BC$, $\triangle ABC \cong \triangle BCE$.

2) Eben so ist zu beweisen, daß $\triangle ABC \cong \triangle CEG \cong \triangle CIG \cong \triangle ICL$.

3) Ist aber dieß, so sind in allen diesen Drey-ecken, die den gleichen Seiten gegenüberliegende Winkel einander gleich, also $ECG = BAC$, $GCI = ACB$, $ICL = BCE = ABC$.

4) Wird nun CL in M halbt, hierauf die IM gezogen und in gerader Richtung verlängert; so muß der Endpunkt der, der Linie IM gleichen Verlängerung derselben mit dem Punkte A zusammenfallen, weil er schlechterdings in keinen andern Punkt fallen kann. Denn er kann nicht fallen

a) in einen andern Punkt der Linie AC selbst

α) *Nicht dießseits* von A in N , denn wäre dieß, so hätte man, da (p. constr.) $LM = MC$, $IM = MN$ und $IML = CMN$, $\triangle MLI \cong \triangle MCN$ und mithin $IL = CN$. Nun ist aber $AC = IL$; folglich wäre $AC = CN$, welches unmöglich ist.

β) *Nicht jenseits* von A in O ; denn alsdenn wäre, weil (p. constr.) $IM = MO$, $LM = MC$ und $IML = CMO$, folglich $\triangle MIL \cong \triangle MCO$, $IL = OC$. Aber $IL = AC$, folglich wäre $OC = AC$, welches unmöglich ist.

b) Nicht

b) Nicht in einen andern Punkt *ausser* der Linie AC.

a) *Nicht dießseits* von AC in P; denn wäre dieß, so hätte man, wie vorhin $\triangle MIL \cong \triangle MCP$; folglich $IL = CP$. Aber $IL = AC$, also auch $CP = AC$.

Nun ist $CIL \perp R$, also noch viel mehr $\left. \begin{matrix} MIL \\ MIC \end{matrix} \right\} \perp R$, aber $MIL = CPM$, folglich auch $CPM \perp R$. Folglich sind die Winkel bey P und I an der Grundlinie des $\triangle CPI$ beyde spitz und mithin muß ein Loth von der Spitze C nach der Grundlinie PI innerhalb des $\triangle CPI$ fallen. Ist aber dieß, so hat man alsdenn auf einerley Seite des Loths zwey gleiche gerade Linien CP, AC, welches, wie früher bewiesen worden ist, unmöglich ist.

β) *Nicht jenseits* von AC in Q; denn in diesem Falle wäre, wie vorhin, $\triangle MIL \cong \triangle MCQ$, folglich $IL = CQ = AC$, und $CQM = MIL$. Da nun $MIL \perp R$, so ist auch $CQM \perp R$. Aber $CIM \perp R$; folglich sind die Winkel bey Q und I an der Grundlinie des $\triangle CQI$ beyde spitz, und ein Loth von C nach IQ muß also innerhalb des $\triangle CQI$ fallen.

Nun kann aber dieses Loth nicht zwischen CQ und CA fallen. Denn wäre dieß, so wäre $CM \cap CA$ und weil $CM = ML$ und $CA = IL$, auch $ML \cap IL$, da doch (p. hyp.) $CIL (= ACB) \perp ICL$, folglich $CL \perp IL$, also noch vielmehr $ML \perp IL$, oder $CM \perp CA$.

Das

Das Loth von C nach IQ muß also nothwendig zwischen CA und CI; alsdenn hat man aber wiederum auf einerley Seite des Loths zwey gleiche gerade Linien CA, CQ, welches unmöglich ist.

Folglich muß der Endpunkt der, der Linie IM gleichen Verlängerung von ihr nothwendig in den Punkt A fallen.

5) Fällt aber der Endpunkt der, der Linie IM gleichen Verlängerung von ihr in den Punkt A, so ist $AM = IM$; und da $IM = BF$, indem $CM = CF$, $CI = CB$ und $ICM = BCF$, so ist auch $AM = BF$. Aber $BF = FG$, also $AM = FG$.

6) Nun ist auch $AC = CG$ und $CM = CF$, folglich $\triangle AMC \cong \triangle FGC$ und mithin $ACM = FCG$.

7) Nun ist auch $BCE = ICL$, folglich auch $ACI = BCG$.

8) Es ist aber auch $ACB = GCI$, folglich sowohl ACG als BCI und ECL gerade Linien.

9) Ist aber dieß, so liegen auf beyden entgegengesetzten Seiten von jeder dieser drey geraden Linien die drey innern Winkel des $\triangle ABC$ an dem Punkte C an einander.

Denn nimmt man z. B. die Linie ACG , so ist

$$\left. \begin{array}{l} ACB + BCE + ECG \\ GCI + ICL + ACL \end{array} \right\} = 2 R, \text{ aber } ACB = GCI,$$

$$\left. \begin{array}{l} BCE \\ ICL \end{array} \right\} = ABC, \left. \begin{array}{l} ECG \\ ACL \end{array} \right\} = BAC, \text{ folglich auch}$$

$$ACB + ABC + BAC = 2 R.$$

Allein

Allein nirgends wird mehr Behutsamkeit erfordert, als bey den apagogischen Beweisen und wenigstens kann *Wolf* entschuldigt werden, wenn er sie zu vermeiden suchte. Es müssen *alle* Fälle, die denkbar sind, genau betrachtet und von allen, den *einen* ausgenommen, den man behauptet hat, der Widerspruch mit schon erkannten Sätzen aufgezeigt werden. Wenn aber neben dem, der zu beweisen ist, noch *einer* möglich bleibt, da ist soviel, wie nichts bewiesen.

Wenn es nun scheint, *Hauff* habe demonstirt, man könne sich des letzten Dreyecks Spitze nicht über und nicht unter A, nicht dießseits dieses Punkts, nicht jenseits denken; so muß man wohl erwägen, daß die Unmöglichkeit des *über* oder *unter* A von denen Punkten nur erwiesen ist, die sich mit M und A in *einer* geraden Linie befinden und so sind auch die *dießs-* und *jenseits* A genommenen Punkte N und O, in *einer* Linie mit CA.

Doch nichts verhindert uns, auch außer diesen Linien den gesuchten Punkt anzunehmen, in *R* etwa, sodenn von diesem Falle die Möglichkeit zu behaupten und den Beweis des Gegentheils zu fordern. Allein dieß zu beweisen, wird man, wie der Versuch es lehren wird, vergeblich sich bemühen, hat man nicht den Beweis auf ganz verschiedenen Wegen hinlänglich vorbereitet.

Darum müssen aber alle die Sätze, die auf diese Demonstration sich berufen, als unbewiesen angesehen werden, denn auch die andere Art, auf welche *Hauff* den Lehrsatz zu beweisen sucht, ist unbefriedigend, welches zu erörtern, wir in der Folge noch Veranlassung finden werden.

III.

Die Schuld der verfehlten Methode trägt zum Theile die Sprache, da es bey sorgfältigerem Abwiegen des Ausdrucks beynahe unmöglich gewesen wäre, den richtigen Weg zu verfehlen.

Immer wollte man an Parallellinien demonstrieren, ohne diesem Ausdrucke eine bestimmte Bedeutung gegeben, ohne ein Merkmal aufgezeigt zu haben, an welchem man den Parallelismus erkennen konnte. Ohne Täuschung und Fehlschlüsse war es daher unmöglich, zu bestimmten Resultaten zu gelangen. Denn da man es unterliefs, auf die Erklärung, die man von jenem Namen zu geben gewohnt war, zu reflectiren, so blieb es freylich unbemerkt, daß sie nichts anders war, als der umschriebene *Begriff* und also in die Classe analytischer Sätze, — mit denen man nicht nur, wie *Kant* ausagt, nicht weit, sondern, nach *Fichte*, gar nicht von der Stelle kommt, gehörte.

Von dieser Art ist das Verfahren, die Parallelen aus dem Begriff der Lage zu erklären, von welchem selbst Herr *Schwab* *) nicht läugnen kann, daß es vag und unbestimmt sey, ja sogar bahnt er sich den Weg, zur eigentlichen Geometrie durch völlige Verläugnung seiner Beschreibung von dem, was man die *Lage* nennt. Diese ist, wie er sehr richtig sagt **), ein bloßes Verhältniß zweyer auf einander bezogener

*) *Schwab* tentamen cit. pag. XIX.

**) *Schwab* l. c. pag. XII sq.

ner Gröſſen, wobey der *Ort* und die eigenthümliche *Quantität* einer jeden gleichgültig iſt, ſo daſs einer Linie an für ſich keine Lage zugeſchrieben werden kann. — Ich füge hinzu, daſs *zwey gerade Linien* ſchlechthin nur *eine* Lage haben, die eben durch das Divergiren beſtimmt wird, — daſs um *zwey* verſchiedene *Lagen* darzuſtellen, wenigſtens *drey* Linien erfordert werden, — daſs die Gleichheit, oder Ungleichheit der Lagen, die man Linien zuſchreibt, einzig in dem *Winkel*, den dieſe bilden, als dem Exponenten dieſer Art von Verhältniſſen, gegründet ſey, — und endlich, daſs parallele Linien, wohl dem Orte, doch nicht der Lage nach verſchieden ſeyen *).

Wenn aber Herr *Schwab* zugleich verſichert, daſs divergirende Linien ihre Lage beſtändig *verändern*, ſo verwechſelt er mit dieſem Begriffe den der *Entfernung*, die doch von der Quantität und dem Orte der Gröſſen nicht unabhängig iſt und dieſs geſchieht in der Folge immer, wenn es geometriſcher Sätze gilt. Sieht man nun mehr auf die Abſicht, als auf den Ausdruck des Verfaſſers, ſo ſagt ſein erſtes *Axiom* in der That nichts anders, als:

wenn zwey Linien, die in gleicher Entfernung fortlaufen, von einer dritten geſchnitten werden;

*) Hiermit ſtimmt *Schwab* a. a. O. S. 3. den Worten nach überein:

Lineae rectae AB, CD (Fig. 1. e.) quoad ſitum non differunt a ſe invicem, ſed hoc respectu identificantur. Si itaque AB ſecundum ſitum refertur ad EF, in hac relatione ſubſtitui illi poteſt recta CD, ſeu relatio rectae AB ad rectam EF quoad ſitum eadem eſt, quae eſt relatio rectae CD ad eandem EF.

den; so bildet diese mit ihnen gleiche Gegenwinkel *).

In wiefern nun dieser Grundsatz dem *Euclidischen* vorzuziehen sey, mag der Leser selbst zu sehen.

Mit Erklärungen ist es der Geometrie überhaupt nur dann gedient, wenn sie Beschreibungen der Constructionen sind, da alles das, was sonst noch sich vom Gegenstande sagen läßt, nicht ohne den Beweis erwähnt werden darf. Nennt man nun Linien parallel, die nie zusammentreffen; so hat man eine Erklärung zwar, doch nicht im Geiste dieser Wissenschaft, denn kann auch das Zusammentreffen zweyer Linien, so kann doch nicht, daß niemals sie zusammentreffen, im Raume dargestellt werden und jede Qualität, die bloß negirt, ist Gegenstand der Demonstration. Erklärt man aber Parallellinien, — um positiv sich auszudrücken, — als Linien, die, soweit man will, verlängert, immer

*) *Schwab l. c. p. 3. Axioma 1. (Fig. 1. e.)* Si duae rectae AB, CD in plano eundem situm habent ad se invicem; habent etiam eundem situm ad rectam tertiam EF. Man nehme hierzu nur noch folgende Erklärungen: Duae rectae diversum inter se situm habere dicuntur, si ex una parte convergunt et ex altera divergunt (pag. 6.) Sie haben also eundem situm ad se invicem, wenn sie in gleicher Entfernung fortlaufen und unter der Lage, die sie zu einer dritten Linie, von welcher sie geschnitten werden, haben, sind die Gegenwinkel, die sie mit dieser bilden, zu verstehen, denn situs duarum rectarum, se invicem secantium dicitur inclinatio (pag. 7.) und *angulus reet-lineus* est duarum rectarum in plano sese tangentium et non in directum jacentium, mutua inclinatio. (pag. 1.)

mer in gleicher Weite bleiben; so frage ich, woran erkennt ihr denn, die stete Gleichheit der Entfernung? Oder verlangt ihr gar, daß ich auf euer Wort es glauben solle, die Linien, die ihr an der Tafel zoget, die hätten diese Eigenschaft? Auf die Figur kann man sich nicht berufen, da selbst auch jene Linien, die im Unendlichen sich schneiden, für jede endliche Betrachtung, gleich entfernt erscheinen.

Hätte man doch nur den Versuch gemacht, eine zu construierende Erklärung zu geben und z. E. solche Linien parallel genannt, die gleiche Wechselwinkel bilden, wenn sie von einer dritten geschnitten werden; so würde man zuerst, daß sie nie zusammentreffen, ohne Anstand haben demonstrieren können, und zweytens im Verfolg wohl eingesehen haben, daß diese Erklärung, nebst dem durch sie gefundenen Beweise, von keinem Nutzen sey und zu dem Beweise anderer Sätze, wie den der Gleichheit aller Winkel im Dreyecke mit zwey rechten, nicht führe. Alsdenn aber hätte man sich genöthigt gesehen, zur Erreichung seines Zwecks, noch mehrere Linien zwischen die Parallelen zu stellen und solchergestalt der Erklärung, — gemäßer einer Methode, — mehr Bestimmtheit zu geben, oder — zum Vortheil der andern, — auf die Genesis dieser Linien zu reflectiren.

Wenn aber der Ursprung der Parallellinien gleichzeitig mit dem der vierseitigen Figuren ist, wenn ihre Eigenschaften nicht anders erkannt werden können, als aus dem Inhalte, der durch sie und zwey andern Linien begrenzt wird; so ist es klar, daß sie überhaupt dahin gehören, wo von den Parallelogrammen gehandelt wird.

Ueberhaupt kann man bey dem Vortrage der Geometrie derselben völlig entbehren, wenn man die Lehre von diesen vollständig abgehandelt hat und man gebraucht ihren Namen nur, um sich kürzer auszudrücken. Allein wenn die Kürze zu Irrthümern Veranlassung gibt; so ist ihr die Umschreibung natürlich vorzuziehen.

Die Geometrie kennt von Linien nur zwey Arten, die geraden und die krummen. Jede andere Classification ist willkührlich und kann in der Wissenschaft keinen isolirten Vortrag zur Folge haben. Nur die Gewohnheit kann die Behandlung der Parallellinien, als einen eigenen Abschnitt erträglich machen und jede ähnliche Absonderung wird zur Carrikatur.

Mit gleichem Rechte könnte man die Linien, die zusammentreffen, als eine eigene Gattung darstellen. Man könnte sie die *Winkellinien* nennen und als Lehrsatz demonstrieren, daß wenn sie durch eine andere gerade Linie geschnitten würden, die Winkel an der Seite, auf welcher sich die Schenkel schneiden, zwey rechten Winkeln, weniger dem Winkel, den man die Spitze nennen dürfte, gleich seyen. Man könnte weiter beweisen, daß der äußere Gegenwinkel dem innern sammt dem Winkel in der Spitze gleich sey und den Zusatz hinzufügen, daß da, wo der letztere $= 0$, (in Parallellinien) der innere Winkel dem äußern Gegenwinkel genau entspreche etc. etc. Wozu das?

Dieß alles wohl erwogen, thue ich den Vorschlag, die Parallellinien, — diese widerspenstigen Unterthanen der Geometrie, wie *Hauff* sie nennt

nennt *), — nicht länger mehr zu dulden und sie vielmehr in die *Geschichte* zu verbannen, in der Wissenschaft aber ihren Namen zu vergessen.

Wie, und wie leicht dieses auszuführen sey, überzeugend darzuthun, ist die eigentliche Absicht dieser Darstellung, die zwar sich anheischig macht, das was man die Eigenschaften der Parallellinien nennt, zu demonstrieren, aber des Namens derselben nirgends bedarf.

*) Hauff a. a. O. S. 306.

IV.

Was den Umfang der Lehre von den Parallellinien betrifft; so findet in dem Schwanken über die Grenze derselben, unsere Behauptung der Wesenlosigkeit dieser Abtheilung, ihre volle Bestätigung, denn indem man den Beweis des 1ten Grundsatzes (in den neuern Ausgaben) der Elemente, als das Ziel der Darstellung betrachtete; so ging man stets weiter, als es der Gegenstand erforderte. Es ist vielmehr einleuchtend, daß dieses Pseudo-axiom in keiner nähern Verwandtschaft mit jener Lehre stehe, als jeder andere Satz der Longimetrie und darum nur zu ihr gehöre, weil alle Theile der Geometrie *ein* Ganzes bilden, und jeder mit dem andern verbunden ist. Denn wenn die Parallelen Linien sind, die immer in gleicher Weite bleiben; so gehören Linien, die sich verlängert schneiden, doch wohl nicht auch in diese Classe und müßte man, wo von den Parallelen die Rede ist, auch die Linien abhandeln, die es nicht sind; so wäre eine Grenze nirgends zu finden.

Das nothwendige Zusammentreffen der Linien, als eine Folge der Neigung, die sie zu einer andern haben, bezieht sich einzig auf die Eigenschaften der Winkel und ist daher auch dahin zu verweisen, wo über diese Aufschluß wird gegeben, ich meine in die Lehre von dem Kreise — und darum wird es hier, wie sich gebührt, im dritten Abschnitte, als Anhang gleichsam aufgeführt, da es doch wegen seiner Wichtigkeit erwähnt werden mußte, besonders da die wahre Demonstration bisher ganz übersehen ward und dieser Mangel sonst der Behandlung der Parallelen zugeschrieben werden möchte.

In dieser Hinsicht hat Herr *Hauff* *) sehr recht, wenn er bedauert, daß man der lieben Schulordnung wegen, die Eigenschaften des Cirkels, zu wenig dazu benutzt hat, eine beyfallerzwingende Parallelentheorie zu Stande zu bringen, ob gleich das, was in Wahrheit zu dieser Theorie zu rechnen ist, jene wohl entbehren kann und das was von ihm selbst geleistet worden ist, für keinen Gewinn gehalten werden kann. Unmöglich kann man ihm beystimmen, daß sich das, was er §. 129—160 vom Kreise sagt, ohne Anstand zwischen §. 96 und 97 einschalten lasse, d. h. daß es unabhängig sey, von dem Satz der Gleichheit aller Winkel im Dreyecke mit zwey rechten, — denn der Beweis für diesen Satz, der hier zum zweytenmal geführt wird, entspricht gleichfalls nicht den Foderungen, die man zu machen berechtigt ist. Die kurze Analyse des Gangs, den er genommen hat, wird dieß erweisen und sie mag um so eher hier eine Stelle finden, da seine Art zu demonstriren, darum, daß sie von einem, mit seiner Wissenschaft so sehr vertrauten Mathematiker herrührt, selbst dann noch lehrreich bleibt, wenn ihr auch ein dauerhaftes Fundament gebricht.

Zuförderst erinnere ich nur, daß er der Lehre von dem Cirkel nicht, wie von mir geschehen ist, sich zum Beweise des oft erwähnten Grundsatzes bedient — denn hierzu wendet er die Exhaustionsmethode an **), sondern nur, um die Summe der drey Winkel im Dreyecke zu bestimmen.

Sehr

*) *Hauff* a. a. O. S. 308.

**) *Hauff* a. a. O. S. 180 folg.

Sehr evident beweist er, daß diese Summe der Summe zweyer rechten gleich sey *), wenn nur als wahr darf angenommen werden, daß der Winkel im Halbkreise ein rechter sey, was aber als bewiesen voraussetzt, daß der Winkel an der Hypothense eines gleichschenkligen, rechtwinklichen Dreyecks, die Hälfte eines rechten Winkels sey **). Zu diesem Ende wird sich nun auf §. 156. Zuf. 2. berufen, welcher §. 156. als Lehrsatz enthält:

*Die Diagonalen des Quadrats halbiren einander lothrecht und sind einander gleich. ***)*

Nun kann ich zwar nicht als einen Fehler rügen, daß von der Möglichkeit des Quadrats in der Folge erst die Rede ist †), denn *Hauff* hat sich des oben gerechtfertigten Kunstgriffs bedient, der der Geometrie wesentlich eigen ist und von dem der erste Abschnitt meiner Darstellung nicht weniger abhängig ist. Auch der geführte Beweis läßt nichts zu wünschen übrig; allein als unmittelbar aus diesem Satze folgend, kann der zweyte Zusatz ††), dem es doch eigentlich hier gilt:

Im gleichschenkligen rechtwinklichen Dreyecke ist der Winkel an der Grundlinie $= \frac{1}{2} R$.

unmög-

*) *Hauff* a. a. O. S. 305.

**) *Hauff* a. a. O. S. 303. N. 8, 12. S. 297. N. 2.

***) *Hauff* a. a. O. S. 286.

†) *Hauff* a. a. O. S. 293.

††) *Hauff* a. a. O. S. 288.

unmöglich angesehen werden, denn dieses ist von denen nur bewiesen, die im Quadrate, — das man sich erst hat geben lassen, ohne es zu construiren, — durch die Diagonalen gebildet werden und könnte nur alsdenn auf alle und jede rechtwinklichen Isocelen ausgedehnt werden, wenn *zuvor* bewiesen wäre, daß aus jedem solchen Dreyecke ein Quadrat erzeugt werden könnte, wenn man die Catheten, als halbe Diagonalen betrachte. Hingegen ist es nicht erlaubt, blos daraus, daß das Quadrat aus vier gleichschenkligen rechtwinklichen Dreyecken bestehe, zu folgern, daß aus vier solcher Dreyecke immer ein Quadrat entstehe.

Indirect kann man sich von der Unstatthaftigkeit einer solchen Beweisart dadurch überzeugen, daß man eine vierseitige Figur von gleichen Seiten annimmt, in welcher zwar ein jeder der vier Winkel gleich, allein dem rechten ungleich und größer oder kleiner, als ein solcher seyen, — und dazu hat man doch das gleiche Recht, wie zu der vorläufigen Annahme des Quadrats. Zieht man nun die Diagonalen, so entstehn gleichfalls vier gleichschenklige rechtwinkliche Dreyecke, in welchen aber die Winkel an der Hypothenuse größer, oder kleiner, als die Hälfte eines rechten Winkels sind. Wie könnte man nun dies als eine Eigenschaft aller rechtwinklichen Isocelen behaupten? Müßte nicht vielmehr die Einschränkung hinzugefügt werden, daß es nur insofern wahr sey, insofern sie durch die Diagonalen einer vierseitigen Figur von gleichen Seiten, in welcher die Winkel dem Rechten nicht gleich seyen, gebildet würden?

Bey einer solchen Methode kann nur das, als kategorisch gültig angenommen werden, was nicht die Folge des Hypothesischen, sondern als die
durch

durch die Annahme entdeckte Beschaffenheit einer Gröſſe, die man zu conſtruiren weiſ, ſich offenbart. Sie bewährt ſich daher nur dadurch, daſs ſie immer daſſelbe Reſultat hervortreten läſt, man mag nun entweder das hypothetiſch Angenommene allgemeiner faſſen, oder die nähere Beſtimmung unrichtig annehmen, nur muß in dieſem Falle der geführte Beweis den Widerſpruch zugleich aufdecken. Allein zieht man in einer vierſeitigen Figur von gleichen Seiten und gleichen Winkeln die nicht näher beſtimmt ſind, die Diagonalen; ſo iſt man nicht im Stande, die Gröſſe der zwey Winkel an der Hypothenuſe der auf dieſe Weiſe entſtehenden Iſocelen, anzugeben. Nach der obigen Annahme aber, daſs die Winkel der Figur dem Rechten ungleich ſeyen, findet man ein unwahres Reſultat, ohne ſich jedoch in einen Widerſpruch verwickelt zu ſehen.

Ganz anders verhält es ſich mit dem Verfahren, das mich im erſten Abſchnitte geleitet hat. Ich beweise, daſs in allen rechtwinklichen Dreyecken, und alſo auch in denen, die gleichſchenklich ſind, das Quadrat der Hypothenuſe den Quadraten der Catheten gleich ſey. Mag es nun auch Quadrate geben, oder nicht, ſo bleibt von dieſem Satze doch immer der Theil wahr, der bloß der Beſchaffenheit und dem Verhältniſſe der Seiten des rechtwinklichen Dreyecks, deſſen Möglichkeit bekannt iſt, zuſchrieben werden muß. Wenn ich daher weiter zeige, daſs im gleichſchenklichen rechtwinklichen Dreyecke das Quadrat des Loths aus dem rechten Winkel auf die gegenüberliegende Seite, dem Quadrate der halben Hypothenuſe gleich ſey und alſo unter dieſen beyden Linien nothwendig auch eine Gleichheit ſtatt finden müſſe, ſo kann ſelbſt dann, wenn ein Quadrat ein Unding ſollte ſeyn, dem letzten nicht widerſprochen werden, denn wären dieſe

Linien so nicht beschaffen, so könnte der Beweis mit unbezweifelt wahren Eigenschaften des Dreyecks, nicht in Einklang stehn und nicht an sie geknüpft worden seyn, wie doch, ohne zugleich auf wider sprechende Behauptungen zu gerathen, geschehen ist.

Daher kommt es denn auch, daß bey allgemeinerem Ausdrucke dasselbe Resultat gezogen werden kann und bey Annahme dessen, was nicht ist, der Widerspruch sogleich hervorleuchtet.

Es sey (Fig. 1. f.) in den vierseitigen Figuren ACDE, BCHI, ABFG, die um das gleichschenklige rechtwinkliche Dreyeck ABC herumliegen, die Winkel zwar von unbestimmter aber gleicher Größe, so daß $ACD = CDE = DEA = EAC = BCI = CIH = IHB = HBC = ABG = BGF = GFA = FAB$, auch seyen die Figuren gleichseitig und $AC = CD = DE = EA$, auch $BC = CI = IH = HB$ und endlich $AB = BG = GF = FA$ und also da

$$AB = BC \text{ (p. hypoth.)}, \quad \left. \begin{array}{l} AB \\ BG \\ GF \\ FA \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} BC \\ CI \\ IH \\ HB \end{array} \right.$$

so ist a) wenn man die Diagonalen FB, BI zieht,

$$\left. \begin{array}{l} \text{da } FG = BH, \\ GB = HI \\ FGB = BHI \end{array} \right\} \text{ (p. hypoth.)}$$

$$\triangle FGB \cong \triangle BHI \text{ (§. 4.)}$$

und eben so läßt sich zeigen, daß $\triangle FAB = \triangle FGB = \frac{1}{2} ABFG$ und $\triangle BHI = \triangle BCI = \frac{1}{2} BCHI$ und daß also $ABFG = BCHI$.

b) Man

b) Man ziehe die Diagonalen AD, CE, so ist,
 da $AE = CD$
 $ED = CA$
 $AD = AD$ } (p. hypoth.) $\begin{cases} ED = CA \\ DC = AE \\ CE = CE \end{cases}$

$$\triangle AED \cong \triangle DCA \text{ (§. 7.) } \triangle EDC \cong \triangle CAE$$

$$\begin{cases} \angle EAD \\ \angle EDA \text{ (§. 5.)} \end{cases} = \begin{cases} \angle CDA \\ \angle CAD \end{cases} \quad \begin{cases} \angle DEC \\ \angle DCE \end{cases} = \begin{cases} \angle ACE \\ \angle AEC \end{cases}$$

Da also $EDA = CDA$, $DCE = ACE$, $CAD = EAD$,
 $AEC = DEC$, so werden die gleichen Winkel CDE,
 DCA, CAE, AED durch die Diagonalen halbirt
 und diese Hälften EDA, CDA etc. sind sich gleich.

c) Da $KAC = KCA$ (b), so ist
 $KA = KC$ (§. 6.), aus demselben Grunde ist auch
 $KC = KD$

$$KD = KE$$

$$KE = KA$$

$$\text{also } KA = KC = KD = KE = KA.$$

Da nun (p. hypoth.) $AC = CD = DE = EA$,
 so ist (§. 7.)

$$\triangle AKC \cong \triangle KCD \cong \triangle KDE \cong \triangle KEA = \frac{1}{4} ACDE \text{ und } AKC = DKC = \text{etc.}$$

Diese gleichschenkligen Dreyecke sind aber auch
 rechtwinklich, denn $AKC + CKD = 2R$ (§. 12.)
 also $AKC = R$ etc.

d) Man ziehe KB, so ist, da
 $AB = BC$ (p. hypoth.)
 $KA = KC$ (c.)
 $BK = BK$

$$\triangle ABK \cong \triangle BCK \text{ (§. 7.)}$$

$$ABK = CBK = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} R \text{ (p. hypoth.)}$$

$$AKB = CKB = \frac{1}{2} AKC = \frac{1}{2} R \text{ (c.)}$$

$$\text{demnach } ABK = AKB \text{ und } \begin{pmatrix} AB \\ BC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AK \\ KC \end{pmatrix}$$

e) Da

$$\begin{array}{l} \text{e) Da } BC = KC \\ AB = AK \\ AC = AC \end{array} \quad (d)$$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle AKC$ (§. 7.) $= \frac{1}{4} ACDE$ (c)

$$\text{und } \begin{array}{l} \{ACB\} \\ \{BAC\} \end{array} = \begin{array}{l} \{ACK \\ CAK \\ KCD \text{ (c)} \} \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$\text{also } \begin{array}{l} \{ACB + ACK\} \\ \{BCK\} \end{array} = \begin{array}{l} \{KCD + ACK\} \\ \{ACD\} \end{array} = BCI \text{ (p. hyp.)}$$

$$\begin{array}{l} \text{f) Da } BC = CI \text{ (p. hypoth.)} \\ BC = KC \text{ (d)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{und also } CI = KC \\ CB = CB \\ \text{und } BCI = BCK \text{ (e)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{so ist } \triangle BCI \cong \triangle BCK \text{ (§. 4.)} \\ BIC = CKB \text{ etc.} \end{array}$$

$$\text{g) } \triangle ABC = \frac{1}{4} ACDE \text{ (e) daher}$$

$$\begin{array}{l} \{\triangle ABC + \triangle AKC\} \\ \{ABCK\} \end{array} = \frac{1}{2} ACDE$$

$$\text{aber es ist } \triangle ABK = \triangle BCK \text{ (d)}$$

$$\text{und daher } \triangle BCK = \frac{1}{2} ABCK$$

$$\text{und } 2\triangle BCK = ABCK = \frac{1}{2} ACDE.$$

$$\text{h) } \triangle BCI = \triangle BCK \text{ (f) also}$$

$$2\triangle BCI = 2\triangle BCK = \frac{1}{2} ACDE \text{ (g)}$$

$$\text{aber } \triangle BCI = \frac{1}{2} BGHI \text{ (a)}$$

$$\text{und } 2\triangle BCI = BGHI = \frac{1}{2} ACDE$$

$$\begin{array}{l} \{2 BGHI \\ \{BGHI + ABFG \text{ (a)}\} \end{array} = ACDE$$

also ist die auf der Hypothenuse beschriebene vierseitige Figur, den auf den Catheten gleich.

i) Fer-

i) Ferner da $\triangle BIH \cong \triangle BIC$ (a)
 und $BIH = BIC = \frac{1}{2} CIH$
 und $\left\{ \begin{matrix} BIC \\ \frac{1}{2} CIH \end{matrix} \right\} = CKB$ (f) $= \frac{1}{2} R$ (d)
 auch $\frac{1}{2} CIH = \frac{1}{2} ACD$ (p. hypoth.) $= ACE$ (b) $= ACB$ (e)
 also $\left\{ \begin{matrix} ACB \\ BAC \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} R = KRC$ und $LC = LB$ (§. 6.)
 und $LA = LB = LC$, auch $BLA = BLC = R$.
 Also ist in diesem rechtwinklichen Isocel ABC das
 Loth aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse,
 der Hälfte derselben und die drey Winkel, zwey
 rechten Winkeln gleich.

Wollte man annehmen, daß die Winkel ACD,
 CDE, DEA, EAC, BCI etc. zwar gleich aber
 größer, oder kleiner, als rechte Winkel seyen; so
 würde in dem eben geführten Beweise nichts geän-
 dert werden, aber ein hervortretender Widerspruch
 sogleich zeigen, daß die Annahme widersinnig sey,
 denn da

$$\left\{ \begin{matrix} BIC \\ BIH \\ \frac{1}{2} CIH \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} CKB \\ \frac{1}{2} R \end{matrix} \right\}$$

so ist klar, daß $CIH = R$ und also dem rechten
 nicht ungleich seyn könne, wie sich im Verfolge
 auch daraus ergibt, daß

$$\left\{ \begin{matrix} BCA \\ ACK \\ \frac{1}{2} ACD \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} R.$$

Was ich noch weiter zur Rechtfertigung mei-
 nes Verfahrens anzuführen für nöthig achte, ist das:

Obschon dem Wahren nur *eine* Form der Dar-
 stellung vollkommen angemessen ist; so ist doch
 alles was geleistet worden ist, ein Schatten blos des
 Urbildes, denn verhehlen wir es nicht, daß alle
 unsere

unsere Werke berechnet sind, auf ein Zeitalter, ein Volk, oder auf geringfügigern Beziehungen. Doch enthalten die Schriften derer, die die Urform nachzuahmen bemüht und berufen sind, Wahrheit, wenn auch nicht in völliger Klarheit, für diejenigen nämlich, welche den gleichen Standpunkt anerkennen. — Nun ist es zwar meine Meynung, daß derjenigen Ansicht, welcher die Behandlung der Geometrie von *Euclides* bis auf unsere Zeiten entspricht, die Demonstrationen des ersten Abschnitts nicht unangemessen seyen; doch aber kann es unmöglich mir entgehn, daß sie mit der Anschauung *einzelner* Mathematiker nicht in gleichem Einklange stehn. Darum, um auch diese, wenn sie der verwickelteren Darstellung folgen wollen, zu befriedigen, habe ich den zweyten Abschnitt eingeschaltet, ob schon die Einwürfe, die sie gegen den ersten in Bereitschaft haben, im Grunde auch den zweyten treffen würden, nur nicht in ihren Augen.

Eigentlich also reiht sich der dritte Abschnitt an den ersten an und zählt daher die Paragraphen da fort, wo dieser aufhört. Nach eben diesem Gesichtspunkte sind die Figuren geordnet worden.

V.

Wer es jemals versucht hat, neue Beweise zu erfinden, der wird es erfahren haben, wie leicht man hierbey einer Täuschung unterworfen ist und wie lange sie zuweilen auch nach wiederholter Prüfung verborgen bleibt. Oft macht man von Hülfslinien Gebrauch, ohne die Construction derselben hinreichend gerechtfertigt zu haben, — und begeht diesen Fehler zum zweyten- und drittenmale. — Oft verwechselt man die Gleichheit des Inhalts mit der Congruenz, ohne dieß bey der Wiederholung des Verfahrens zu bemerken. Oft glaubt man bey Apagogen alle Fälle erschöpft zu haben, da man doch nur von einigen Fällen ihre Unmöglichkeit dargethan hat und noch öfter ist man in Gefahr, den Beweis aus Sätzen zu führen, die selbst erst das, was man beweisen will, als ausgemacht voraussetzen.

So wenig ich nun die Möglichkeit einer Täuschung bey der nachstehenden Abhandlung läugne; so glaube ich doch die letztere Art durch die sorgfältigste Prüfung vermieden zu haben und damit man mit einem Blicke übersehe, daß kein Beweis auf einen Satz, der blos erschlichen wäre, gestützt ist; so habe ich auch das bekannteste nicht unbewiesen gelassen und von dem Unbeweisbaren, — den Foderungen, Erklärungen und Grundsätzen, — nur das, was unbestritten ist, vorausgesetzt. Dadurch aber, daß ich jeden geometrischen Satz, auf den sich das Eigenthümliche dieser

dieser

dieser Darstellung bezieht, in dieselbe aufgenommen habe, habe ich mich zugleich der Nothwendigkeit, mich auf irgend ein Lehrbuch zu berufen, entzogen.

Die Lehre

von den

Parallellinien.

Old Photo

and

2nd Edition

Erster Abschnitt.

Die Eigenschaften der Parallellinien.

Erster Abschnitt.

Die Eigenschaften der Patallin.

§. 1.

AUFGABE.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Es sey (Fig. 2.) AB eine gegebene begrenzte gerade Linie, und man soll auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte A, mit der Weite AB einen Kreis BCD und aus dem Mittelpunkte B mit der Weite BA einen Kreis ACE, alsdann ziehe man von dem Punkte C, in welchem die beyden Kreise einander schneiden, nach den Punkten A und B die Linien CA, CB, auch verlängere man die AB nach E.

Beweis.

1. Die Kreise ACE, CDB schneiden sich nothwendig, denn da AB ein beyden gemeinschaftlicher Halbmesser ist, der Halbmesser BE aber ausserhalb des

des Kreises CDB liegt, so liegt auch von der Kreisfläche ACE ein Theil innerhalb, ein Theil aber außerhalb der Kreisfläche CDB und darum liegen auch die Grenzen der Flächen, die Peripherien zum Theil innerhalb zum Theil außerhalb einander und schneiden sich.

2. Da A der Mittelpunkt des Kreises DCB ist, so ist $AB = AC$ allein $AB = BC$, denn sie sind ebenfalls Halbmesser eines Cirkels ACE, folglich auch $AC = BC$ und $AB = AC = BC$, d. h. es ist $\triangle ABC$ gleichseitig, auch ist es auf der gegebenen Linie AB beschrieben.

§. 2.

AUFGABE.

An einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu setzen, die einer gegebenen geraden begrenzten Linie gleich sey.

Es soll an den gegebenen Punkt A (Fig. 3.) eine Linie gesetzt werden, welche der gegebenen Linie BC gleich sey.

Auflösung.

Man ziehe AB und errichte darauf das gleichseitige Dreyeck ADB (§. 1.) und verlängere die DA, DB in gerader Richtung nach L, F. Hierauf beschreibe man aus dem Punkte B, mit der Weite BC den Kreis CGH und aus dem Punkte D mit der Weite DG den Kreis GKL.

Beweis.

Beweis.

BG = BC als Radien desselben Kreises, eben so
 DL = DG, aber, nach der Construction
 DA = DB, folglich

$$\left\{ \begin{array}{c} DL - DA \\ AL \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} DG - DB \\ BG \end{array} \right\} = BC.$$

Es ist demnach an den Punkt A eine der BC gleiche gerade Linie AL gesetzt worden.

§. 3.

A U F G A B E.

*Von der grössern zweyer gegebenen ungleichen geraden
 Linien, ein der kleinern gleiches Stück
 abzuschneiden.*

Es sey (Fig. 4.) von den zwey gegebenen Linien AB, C, AB die grössere und man soll von ihr ein der C gleiches Stück abschneiden.

Auflösung.

Man setze an A eine der C gleiche Linie AD (§. 2.) und beschreibe aus dem Mittelpunkte A, mit der Weite AD den Kreis DEF.

Beweis.

AD = AE als Radien desselben Kreises,
 AD = C, nach der Construction,

mithin AE = C.

Es ist aber AE ein Stück der AB.

§. 4.

LEHRSATZ.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel einander stückweise gleich sind, so sind auch die Dreyecke gleich und decken sich.

Es sey (Fig. 5.) in den Dreyecken ABC, DEF, $AB = DE$ und $AC = DF$, auch sey der Winkel $BAC = EDF$, so ist auch $\triangle ABC = \triangle DEF$, $BC = EF$, $ABC = DEF$ und $ACB = DFE$.

Beweis.

Da vorausgesetzt wird, dafs $BAC = EDF$, so fällt AC auf DF, wenn man AB auf DE legt, da nun ferner, nach der Voraussetzung, $AB = DE$ und $AC = DF$ so fällt auch der Punkt B auf den Punkt E und C auf F, mithin aber auch die Linie BC auf die EF, da zwischen zwey Punkten nur *eine* gerade Linie möglich ist. Wenn aber BC die Linie EF ganz bedeckt und umgekehrt; so sind sie sich gleich, auch sind $ABC = DEF$ und $ACB = DFE$, überhaupt aber $\triangle ABC = \triangle DEF$.

§. 5.

LEHRSATZ.

In gleichschenkligen Dreyecken sind die Winkel an der Grundlinie und, wenn man die gleichen Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Es sey (Fig. 6.) in dem Dreyecke ABC, $AB = AC$, so ist $ABC = ACB$ und wenn man die AB nach D und die AC nach E verlängert $CBF = BCG$.

Beweis.

Beweis.

Man nehme in der BD nach Belieben einen Punkt F an und schneide von der AE ein der AF gleiches Stück AG ab (§. 3.) und ziehe CF, BG.

$$\begin{aligned} \text{Da nun } BAC &= BAC, \\ AB &= AC \text{ (p. hypoth.)} \\ AG &= AF \text{ (p. constr.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{so ist } 1) \triangle ABG &\cong \triangle ACF \\ 2) \quad BG &= CF \\ 3) \quad ABG &= ACF \\ 4) \quad BGA &= CFA. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \end{aligned}} \right\} (\S. 4.)$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } AG &= AF \text{ (p. constr.)} \\ AC &= AB \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \left(\begin{array}{c} AG - AC \\ \quad CG \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} AF - AB \\ \quad BF. \end{array} \right) \\ BG &= CF \text{ (2)} \\ BGA &= CFA \text{ (4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } a) \triangle BCG &\cong \triangle CBF \\ b) \quad BCG &= CBF \\ c) \quad CBG &= BCF \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a) \\ b) \\ c) \end{aligned}} \right\} (\S. 4.)$$

$$\begin{aligned} \text{Wenn aber } AEG &= ACF \text{ (3)} \\ CBG &= BCF \text{ (c)} \end{aligned}$$

$$\text{so ist auch } \left(\begin{array}{c} ABG - CBG \\ \quad ABC \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} ACF - BCF \\ \quad ACB \end{array} \right)$$

und es ist bewiesen, dass die Winkel an der Grundlinie (ABC und ACB) und auch die unter derselben, (BCG, CBF [b]) gleich sind.

§. 6.

LEHRSATZ.

Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind; so sind auch die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Es sey (Fig. 7.) im $\triangle ABC$, der Winkel $ABC = ACB$, so ist auch $AC = AB$.

Beweis.

Gesetzt es sey $AB \neq AC$, so mache man $BD = AC$ (§. 3.) und ziehe DC , so ist, da

$$\begin{array}{rcl} BC & = & BC, \\ BD & = & AC \text{ (p. constr.)} \\ ABC & = & ACB \text{ (p. hypoth.)} \end{array}$$

$\triangle DBC \cong \triangle ABC$, welches ungereimt ist, da $\triangle DBC$ nur ein Theil vom $\triangle ABC$ ist, es ist daher auch ungereimt anzunehmen, die AC sey der AB ungleich.

§. 7.

LEHRSATZ.

Wenn in Dreyecken die Seiten stückweise gleich sind, so decken sie sich.

Es sey (Fig. 8.) $AB = DE$, $BC = EF$ und $AC = DF$, so sind auch die Dreyecke ABC , DEF congruent.

Beweis.

Man bringe die BC auf die EF , so fällt, wenn B auf E gelegt ist, C auf F , da $BC = EF$. Fiele nun

nun auch BA auf ED, so wäre $ABC = DEF$ und da angenommen ist, daß $AB = DE$, so wäre $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§. 4.)

Man nehme nun an, AB fiele während BC auf EF liegt, nicht auf DE, sondern bilde 1) die Linie EG und daher AC, die GF, oder 2) die Linie EH und AC, die HF.

Im ersten Fall ziehe man DG, so ist, da $GF = AC = DF$, a) $FDG = FGD$ (§. 5.) und $FGD = FGE + EGD$, also $FGD \supset EGD$, sodenn ist, da $EG = BA = ED$, b) $EDG = EGD$ und $EDG = EDF + FDG$, also $\left(\begin{smallmatrix} EDG \\ EGD \end{smallmatrix} (b) \right) \supset \left(\begin{smallmatrix} FDG \\ FGD \end{smallmatrix} (a) \right)$ EGD ist also größer und auch kleiner als FGD, was ungereimt ist.

Im zweyten Fall ziehe man DH, so ist, da $HF = AC = DF$, a) $FHD = FDH$ (§. 5.), aber $FDH = FDE + EDH$, mithin $FDH \supset EDH$. Es ist ferner, b) da $HE = AB = DE$, b) $EHD = EDH$ und da $EHD = EHF + FHD$, so ist $\left(\begin{smallmatrix} EHD \\ EDH \end{smallmatrix} \right) \supset FHD$, es ist aber auf $FHD \supset EDH$, was ungereimt ist.

Es fällt also die BA auf die ED und die CA auf die FD und daher ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Anmerkung. Wollte jemand dem $\triangle ABC$ die Lage EFG (Fig. 1. h.) geben, so wäre da $ED = EG$, $EDG = EGD$ und da $FD = FG$, $HDG = IGD$ und $IGD \supset EDG$, aber $\left(\begin{smallmatrix} EGD \\ EDG \end{smallmatrix} \right) \supset IGD$, welches sich widerspricht.

§. 8.

AUFGABE.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Es sey der gegebene geradlinige Winkel BAC (Fig. 9.) und man soll diesen halbiren.

Auflösung.

Auf dem Schenkel AB nehme man nach Willkühr einen Punkt D an und schneide von AC ein Stück $AE = AD$ (§. 3.) ab und ziehe die DE, auf welcher Linie man das gleichseitige Dreyeck DEF beschreibe (§. 1.) Zieht man nun die AF, so theilt diese den Winkel BAC in zwey gleiche Theile.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} AD = AE \\ DF = FE \\ AF = AF \end{array} \right\} \text{ (p. constr.)}$$

folglich $\triangle ADF \cong \triangle AEF$ (§. 7.) und $\angle DAF = \angle EAF$, da diese Winkel von den gleichen Seiten DA, AF, und EA, AF eingeschlossen werden.

§. 9.

AUFGABE.

Eine gegebene begrenzte gerade Linie zu halbiren.

Es sey AB (Fig. 10.) die gegebene Linie, welche halbirt werden soll.

Auf-

Auflösung.

Man errichte auf AB das gleichseitige Dreyeck ABC (§. 1.) und halbire den Winkel ACB, so wird die Linie AB in dem Punkte D halbir.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} CD = CD \\ AC = BC \\ ACD = BCD \end{array} \right\} \text{(per constr.)}$$

folglich $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (§. 4.) und $AD = DB$.

§. 10.

AUFGABE.

Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem auf ihr gegebenen Punkte, ein Loth aufzurichten.

Es sey C (Fig. 11.) der Punkt auf der gegebenen Linie AB, auf welchem ein Loth errichtet werden soll.

Auflösung.

Man nehme willkührlich einen Punkt D an und mache $CE = CD$ (§. 3.) hierauf errichte man auf DE das gleichseitige Dreyeck DEF (§. 1.) und ziehe die FC, so ist $FCA = R$.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} Da \quad FC = FC \\ \quad DF = FE \\ \quad DC = CE \end{array} \right\} \text{(p. constr.)}$$

so ist $\triangle DFC \cong \triangle CFE$ (§. 7.), mithin aber
sind

sind die von den gleichen Seiten CF , CD und CF , CE eingeschlossenen Winkel FCD und FCE gleich und die FC steht im Punkte C auf AB lothrecht, da sie die beyden Nebenwinkel gleich macht.

§. 11.

AUFGABE.

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie ein Loth von einem ausser ihr gegebenen Punkte zu fällen.

Es sey C (Fig. 12.) der Punkt, von welchem auf die unbegrenzte Linie AB ein Loth gefällt werden soll.

Auflösung.

Man nehme (Fig. 12.) auf der gegenüberliegenden Seite der Linie AB nach Belieben einen Punkt D an und ziehe CD . Mit der Weite CD beschreibe man den Kreis $DGFE$ und halbire die GE . Endlich ziehe man von C auf den Theilungspunkt H , die CH , so steht diese Linie auf AB lothrecht.

Beweis.

1) Der Kreis $DGFE$ schneidet die Linie AB in zwey Punkten G , E . Denn da der Punkt I der Linie AB auch im Halbmesser CD liegt und $CI \perp CD$, so liegt auch ein Theil der Linie zwischen dem Mittelpunkt und die Peripherie, d. i. innerhalb des Kreises. Da aber AB auf beyden Seiten unbegrenzt ist, so liegt auch auf beyden Seiten ein Theil der Linie, ausserhalb des Kreises, da dieser eine begrenzte Figur ist. Wenn aber das ist, so muß die Linie AB auf zwey Seiten durch die Peripherie hindurch-

durchgehn, d. h. den Kreis in zwey Punkten schneiden.

2) Die CH steht auf der AB lothrecht. Denn
 da $CH = CH$
 $GH = EH$ (p. constr.)
 $CG = CE$ als Halbmesser *eines* Kreises;

so ist $\triangle CHG \cong \triangle CHE$ und $CHG = CHE$ (§. 7.)
 Da demnach CH zwey gleiche Nebenwinkel macht,
 so steht sie auf AB vertical.

§. 12.

LEHRSATZ.

Wenn eine gerade Linie auf eine andere trifft, so dass zwey Nebenwinkel entstehen, so sind diese zusammengekommen zwey rechten Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 13.) AB eine gerade Linie, welche die CD in B trifft; so ist $ABC + ABD = 2 R.$

Beweis.

Ist $ABD = R$, so ist es auch ABC und also $ABD + ABC = 2 R.$ Ist aber $ABD \neq R$, so errichte man die BE auf B lothrecht, so ist $EBD = EBC = R.$

Es ist aber $ABC = \begin{Bmatrix} EBC \\ EBD \end{Bmatrix} - EBA$

und $ABD = EBD + EBA$

mithin $ABC + ABD = EBD - EBA + EBD + EBA = 2 EBD.$ Da nun $EBD = R$ (p. constr.),
 $2 EBD = 2 R$, so ist auch $ABC + ABD = 2 R.$

§. 13.

LEHRSATZ.

Wenn drey Linien in einen Punkt so zusammentreffen, dass die Winkel, welche die erste und die zweyte und die zweyte und die dritte machen, zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so liegen die erste und die dritte in einer geraden Linie.

Es seyen die Winkel ABC, ABD (Fig. 14.), welche durch die im Punkte B zusammentreffenden Linien CB, AB, DB gebildet werden, zwey rechten Winkeln gleich, so ist CD eine gerade Linie.

Beweis.

Man nehme an, BD liege mit der CB nicht in einer geraden Linie, so sey BE die verlängerte CB. Alsdenn ist,

$$\text{da } \angle ABC + \angle ABD = 2R \text{ (p. hypoth.)}$$

$$\angle ABC + \angle ABE = 2R \text{ (§. 12.)}$$

$\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE$ und $\angle ABD = \angle ABE$ welches ungereimt ist. Es ist daher unmöglich, dass BE die verlängerte CB sey, welches auch von einer jeden andern geraden Linie, ausser der BD gilt.

LEHRSATZ.

Wenn zwey gerade Linien einander schneiden, so machen sie die Scheitelwinkel einander gleich.

Es schneide (Fig. 15.) AB die Linie CD in E; so ist 1) $\angle AEC = \angle BED$ und 2) $\angle CEB = \angle AED$.

Beweis.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{AEC} + \text{CEB} = 2R \\ \text{BED} + \text{CEB} = 2R \end{array} \right\} (\S. 12.)$$

folglich $\text{AEC} + \text{CEB} = \text{BED} + \text{CEB}$ und 1) $\text{AEC} = \text{BED}$.

$$\text{Ferner } \left. \begin{array}{l} \text{AEC} + \text{CEB} = 2R \\ \text{BED} + \text{AED} = 2R \end{array} \right\} (\S. 12.)$$

$$\begin{array}{l} \text{mithin } \text{AEC} + \text{CEB} = \text{BED} + \text{AED} \\ \text{aber } - \text{AEC} \qquad \qquad = - \text{BED} \quad (1) \end{array}$$

$$\text{demnach 2) } \text{CEB} = \text{AED}.$$

 $\S. 15.$ **LEHRSATZ.**

An jedem Dreyecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äussere Winkel grösser, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Es sey (Fig. 16.) die Seite BC des Dreyecks ABC, nach D verlängert, so ist ACD grösser, als BAC und als ABC.

Beweis.

Zuförderst verlängere man AC nach G, halbiere die AC in E (§. 9.), ziehe BE und verlängere sie und mache $\text{EF} = \text{BE}$ (§. 3.) und ziehe endlich FC. So ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{da } \text{EA} = \text{EC} \\ \text{BE} = \text{FE} \end{array} \right\} (\text{p. constr.})$$

$$\text{und } \text{AEB} = \text{CEF} (\S. 14.)$$

$$\triangle \text{ABE} \cong \triangle \text{CEF} (\S. 4.) \text{ und also } \text{CF} = \text{BA}$$

und $\text{BAC} = \text{ACF}$, da sie von gleichen Seiten $\left\{ \begin{array}{l} \text{BA} \\ \text{CF} \end{array} \right\}$ und

und $\begin{Bmatrix} EA \\ EC \end{Bmatrix}$ eingeschlossen werden. Nun ist $ACD \supset ACF$, folglich auch $ACD \supset BAC$.

Halbirt man nun die BC und verfährt auf die vorige Weise, so ergibt sich, daß $BCG \supset ABC$. Allein $BCG = ACD$ (§. 14.), mithin $ACD \supset ABC$.

§. 16.

LEHRSATZ.

In jedem Dreyecke liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

Es sey (Fig. 17.) in dem Dreyecke ABC, $AC \supset AB$, so ist auch $ABC \supset BCA$.

Beweis.

Man mache $AD = AB$ (§. 3.), und ziehe BD, so ist $ADB = ABD$ (§. 5.), aber $ADB \supset ACB$ (§. 15.), also auch $ABD \supset ACB$, um so mehr aber ist $\begin{Bmatrix} ABD + CBD \\ ABC \end{Bmatrix} \supset ACB$.

§. 17.

LEHRSATZ.

In jedem Dreyecke liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber.

Es sey (Fig. 17.) in dem Dreyecke ABC, der Winkel $ABC \supset BCA$, so ist auch $AC \supset AB$.

Beweis.

Beweis.

Wäre $AC = AB$, so wäre auch $BCA = ABC$ (§. 5.), welches der Voraussetzung widerspricht. Wäre aber $AC \perp AB$, so müßte $ABC \perp BCA$ seyn, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Demnach ist $AC \neq AB$.

§. 18.

LEHRSATZ.

In jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen größer, als die dritte.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 17.) ist $BA + AC > BC$, die $AB + BC > AC$ und die $BC + CA > AB$.

Beweis.

Man verlängere die BA und mache $AD = CA$ (§. 3.) und ziehe DC , so ist $ADC = ACD$ (§. 5.),

mithin $\left\{ \begin{array}{l} ACD + BCA \\ BCD \end{array} \right\} > ADC$ und

$\left\{ \begin{array}{l} BD \\ BA + AD \\ BA + AC \end{array} \right\} > BC$ (§. 17.)

Auf eben diese Art kann von einem jeden andern Paar Seiten gezeigt werden, daß sie zusammen größer seyen, als die dritte.

AUFGABE.

Aus drey geraden Linien, welche drey andern gegebenen, von denen jede zwey zusammen grösser, als die dritte sind, stückweise gleich seyen, ein Dreyeck zu errichten.

Es seyen (Fig. 18.) die drey gegebenen Seiten A, B, C, von welchen immer zwey grösser, als die dritte seyen, und man soll ein Dreyeck errichten, dessen Seiten diesen drey Linien gleich seyen.

Auflösung.

Man ziehe von D aus eine unbegrenzte Linie gegen E, mache $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$ (§. 3.) und beschreibe aus F, mit der Weite FD den Kreis DKL, und aus G, mit der Weite GH, den Kreis HKL und ziehe KF, KG, so sind die Seiten KF, FG, GK des Dreyecks GKF, den A, B, C stückweise gleich.

Beweis.

1) Die beyden Kreise DKL, HKL schneiden sich, da ein Theil des Kreises HKL immer ausserhalb DKL liegt, denn wenn $FG = FD$, so fällt G in die Peripherie DKL und die Sache ist von selbst klar. Ist aber $FG < FD$, so fällt G zwar innerhalb DKL, allein ein Theil des Halbmessers GH und folglich ein Theil von HKL ausserhalb DKL, da $FG + GH > FD$, wie vorausgesetzt wird. Wäre endlich $FG > FD$, so wie in der Figur $FG > HG$, so würde der Mittelpunkt des einen Kreises z. B. DKL ausserhalb des andern HKL fallen, aber weder könnte der Radius FM so gross seyn, daß er über H hinaus-

hinausreichte, da sonst $\left. \begin{matrix} FM \\ FD \end{matrix} \right\} \neq FG + GH$, noch könnte er so klein seyn, daß er den andern Kreis nicht erreichen sollte, da, wenn er Fm wäre, die eine der gegebenen Seiten $GF = \left\{ \begin{matrix} Gm \\ GH \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} Fm \\ FD \end{matrix} \right\}$, was der Voraussetzung abermals widerspricht.

2) Die Seiten KF , HG , FG des beschriebenen Dreyecks GKF sind den gegebenen Linien A , B , C gleich. Denn es ist da Radien *eines* Krei-

ses gleich sind, $FD = KF$, $GH = KG$ und, nach der Con-

struction, $FD = A$, $GH = C$ auch $FG = B$

folglich ist auch $KF = A$, $KG = C$, $FG = B$.

§. 20.

AUFGABE.

An eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt einen geradlinigen Winkel zu setzen, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Man soll an den Punkt A der gegebenen Linie AB einen Winkel ansetzen, der dem gegebenen Winkel DCE gleich sey.

Auflösung.

Man nehme auf CD , CE (Fig. 19.) nach Belieben die Punkte D , E an und ziehe DE . Hierauf errichte man auf AB , aus drey Linien, die den Seiten CE , CD , DE gleich seyen ein Dreyeck (§. 19.), so daß $AG = CE$, $AF = CD$, $FG = DE$, so ist $GAF = ECD$.

Beweis.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Da } AG = CE \\ \quad AF = CD \\ \quad FG = DE \end{array} \right\} \text{ (p. constr.)}$$

so ist $\triangle AGF \cong \triangle CED$ (§. 7.) und daher $GAF = ECD$ da diese Winkel von den gleichen Seiten AG , AF und CE , CD eingeschlossen werden.

§. 21.

LEHRSATZ.

In jedem Rechtecke sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

Es seyen (Fig. 20.) in der vierseitigen Figur $ABCD$, die vier Winkel ABD , BDC , DCA , CAB , rechte Winkel, so ist $AB = CD$ und $AC = BD$.

Beweis.

Es seyen CA und DB nicht gleich, sondern $DB \perp CA$, so verlängere man DB und mache $DE = CA$ (§. 3.) und ziehe EA , EC , AD , so ist,

$$\begin{array}{l} 1) \text{ da } CD = CD \\ \quad CA = DE \text{ (p. constr.)} \\ \quad DCA = BDC \text{ (p. hypoth.)} \end{array}$$

$$\triangle ACD \cong \triangle ECD \text{ (§. 4.)}$$

und $AD = EC$

$$\begin{array}{l} 2) \text{ Da } AE = AE \\ \quad AC = ED \text{ (p. constr.)} \\ \quad CE = DA \text{ (1)} \end{array}$$

$$\text{so ist } \triangle AEC \cong \triangle EAD \text{ (§. 7.)}$$

und $EAC = AED$.

3) Da

3) Da $EAC = EAB + CAB$ und $CAB = R$ (p. hypoth.) so ist $EAC \neq R$. Aber $EAC = AED$ (2) mithin $AED \neq R$.

4) Da $ABD = R$ (p. hypoth.) und $ABD \neq AED$ (§. 15.) so ist $R \neq AED$. Allein $AED \neq R$ (3), welches sich widerspricht. Es ist daher in der Annahme, daß BD der AC ungleich sey, ein Widerspruch enthalten.

Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß auch die CD der AB gleich sey.

Zusatz.

Die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten in allen vierseitigen Figuren, in welchen die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, kann hier noch nicht so allgemein bewiesen werden, sondern setzt die Einschränkung voraus, daß von zwey gegenüberliegenden Seiten die Gleichheit bekannt sey.

Wenn nämlich (Fig. 21.) $BAC = CDB$, $ACD = ABD$ und $AB = CD$, dann ist auch, wie sich jetzt schon beweisen läßt, $AC = BD$. Denn gesetzt, es wäre $AC \neq BD$, so verlängere man DB und mache $DE = AC$, so ist, wenn EC , BC gezogen wird,

$$\begin{array}{l} 1) \quad BAC = CDB \\ \quad \quad AB = CD \\ \quad \quad AC = ED \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} BAC = CDB \\ AB = CD \\ AC = ED \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{(p. hypoth.)} \\ \text{(p. constr.)} \end{array}$$

$$\triangle BAC \cong \triangle CED \text{ (§. 4.)}$$

$$BC = EC$$

$CBA = ECD$, denn dieß sind die Winkel die von den gleichen Seiten BC , AB und EC , CD eingeschlossen werden.

E

2) Zieht

2) Zieht man die AE, so ist
 da $\left(\begin{smallmatrix} \text{ACD} \\ \text{ACE} + \text{ECD} \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \text{ABD} \\ \text{CBA} + \text{CBD} \end{smallmatrix} \right)$ (p. hypoth.)
 und $\text{ECD} = \text{CBA}$ (1)

$$\text{ACE} = \text{CBD.}$$

3) Man verlängere nun BD und mache
 $\text{BF} = \text{DE} = \text{CA}$ und ziehe CF so ist, da $\text{BC} = \text{CE}$ (1),
 $\text{CBD} = \text{ACE}$ (2)

$$\triangle \text{BCF} \cong \triangle \text{ECA} \text{ (§. 4.)}$$

$$\text{und } \text{BFC} = \text{EAC},$$

$$\text{aber } \left\{ \begin{smallmatrix} \text{BFC} \\ \text{EAC} \\ \text{EAB} + \text{BAC} \end{smallmatrix} \right\} \neg \left\{ \begin{smallmatrix} \text{BAC} \\ \text{CDB} \end{smallmatrix} \right. \text{ (p. hyp.) } \left. \right\}$$

$$\text{oder } \text{BFC} \neg \text{CDB},$$

$$\text{allein } \text{BFC} \perp \text{CDB} \text{ (§. 15.)}$$

Vermöge dieses Widerspruchs ist es eine widersinnige Annahme, dass AC, BD ungleich seyen.

§. 22.

LEHRSATZ.

Wenn gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks verlängert werden und es wird auf der einen derselben ein Loth errichtet und bis auf die gegenüberliegende verlängert; so ist dieses Loth den andern nicht verlängerten Seiten des Rechtecks gleich und steht auf den beyden verlängerten Seiten lothrecht.

Es seyen (Fig. 22. 23.) die Winkel der vierseitigen Figur ABCD rechte Winkel und die gegenüberliegenden Seiten AB, CD, nach E, F, verlängert, sodenn sey auf CE das Loth GH errichtet und bis an H in der Linie AF verlängert, so ist $\text{GH} = \text{BD}$ und $\text{GHB} = \text{R}$.

Beweis.

Beweis.

I. Die verlängerten AB, CD (Fig. 22.) können, wenn sie noch so weit verlängert werden, nie zusammentreffen. Denn diess geschähe in O, so entstünde ein Dreyeck BOD, wenn man nun die BD nach P verlängert, so wäre $\angle PDO = \angle DBO$ (§. 15.) Allein $\angle ODP = R$ (§. 14.) da $\angle CDB = R$ (p. hypoth.) und auch $\angle DBO = R$ (§. 12.) da $\angle ABD = R$ (p. hypoth.), folglich $\angle PDO = \angle DBO$, welches widersprechend wäre. Aus gleichem Grunde treffen BA, DC auch auf der andern Seite verlängert nicht zusammen.

II. $GH = GB$. Geſetzt GH ſey der BD nicht gleich, ſondern 1) größer, ſo mache man $GI = BD$ (§. 3.), ſo iſt auch $GI = AC$ (§. 21.). Man ziehe nun

$$\begin{aligned} \text{a) } & BI, GB, ID, \text{ ſo iſt} \\ & \text{da } DG = DG \\ & \quad BD = IG \text{ (p. conſtr.)} \\ & R = BDG \text{ (§. 12.)} = IGD \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ſo iſt } \triangle BDG \cong \triangle IDG \text{ (§. 4.)} \\ & \text{und } BG = ID. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Ferner da } BI = BI \\ & \quad BD = IG \text{ (p. conſtr.)} \\ & \text{und } ID = BG, \text{ wie ſo eben gezeigt worden,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ſo iſt } \triangle DBI \cong \triangle BIG \text{ (§. 7.)} \\ & \text{und } DBI = BIG. \end{aligned}$$

b) Man ziehe nun AI, ſo ſchneidet dieſe Linie die BD, denn ginge ſie über B weg, wie AKLI, ſo würde ſie die AH ſchneiden und mit der Linie AH zwey Punkte A und L gemeinſchaftlich haben und alſo mit dieſer eins ſeyn, da zwiſchen zwey Punk-

ten nur *eine* gerade Linie möglich ist, welches aber der Voraussetzung, daß die Punkte I und H verschieden seyen widerspricht, denn wollte man behaupten, die verlängerte AH komme nach I, so würde AHIG *eine* gerade Linie seyn und also AB verlängert mit der verlängerten CG zusammentreffen, wovon die Unmöglichkeit bewiesen ist (I.).

Ginge aber die AI unter D weg, wie AMNI; so würde sie die CE in zwey Punkten M, N schneiden, wodurch es denn geschähe, daß sie mit dieser zwey Punkte gemeinschaftlich hätte und also von ihr nicht verschieden wäre, sondern mit ihr zusammenfiel. Wenn aber das ist, so trifft CE in A mit AB zusammen, welches absurd ist.

Man ziehe nun AG, IC, so ist

$$\text{da } CG = CG$$

$$AC = IG \text{ (p. constr.)}$$

$$R = ACG = IGC \text{ (p. hypoth.)}$$

$$\text{so ist } \triangle ACG \cong \triangle IGC \text{ (§. 4.)}$$

$$\text{und } AG = CI.$$

Wenn aber $AG = CI$

$$\text{und } GI = CA$$

$$AI = AI$$

$$\text{so ist } \triangle AGI \cong \triangle IAG \text{ (§. 7.)}$$

$$\text{und } CAI = GIA.$$

c) Da $BIG = BIA + AIG$, so ist $BIG \succ AIG$, aber $BIG = IBD$ (a), so ist auch $IBD \succ AIG$. Allein $AIG = CAI$ (b) und daher $IBD \succ CAI$.

d)

$$d) \left(\begin{array}{l} \text{HBD} \\ \text{HBI} + \text{IBD} \end{array} \right) = R \text{ (§. 12.)}$$

$$\text{BAC} = R \text{ (p. hypoth.)}$$

$$\text{demnach } \left(\begin{array}{l} \text{BAC} \\ \text{BAI} + \text{CAI} \end{array} \right) = \text{HBI} + \text{IBD}$$

$$\text{aber } \text{BAI} \perp \text{HBI} \text{ (§. 15.)}$$

und folglich $\text{CAI} \not\perp \text{IBD}$, denn wenn man auf der einen Seite BAI, und auf der andern HBI wegnimmt, so wird auf jener weniger, als auf dieser weggenommen, und da vorher alles gleich war, so ist nunmehr der Rest der ersten Seite gröfser, als der der andern.

Es ist also bewiesen, dafs $\text{CAI} \not\perp \text{IBD}$ und es ist auch bewiesen (c), dafs $\text{CAI} \perp \text{IBD}$, was ungereimt ist. Es ist also eben so ungereimt anzunehmen, dafs GH gröfser sey, als BD.

2) Man nehme an, dafs $\text{HG} \perp \text{BD}$, so mache man (Fig. 23.) $\text{GI} = \text{BD} = \text{AC}$ (§. 21.) und ziehe BI, AI, wo AI über der B weggehn mufs, da diese Linie sonst die AH schneiden müfste, mit der sie doch schon den Punkt A gemein hat. Nun wird gerade wie vorhin gezeigt, dafs $\text{DBI} = \text{GIB}$ und $\text{CAI} = \text{GIA}$ und dafs also, da $\text{AIG} \not\perp \text{BIG}$, auch $\text{CAI} \not\perp \text{DBI}$. Da aber $\text{DBH} = \text{CAB} = R$, so ist $\text{BAI} \not\perp \text{HBI}$. Allein $\text{HBI} \not\perp \text{BAI}$ (§. 15.) welches sich gleichfalls widerspricht.

Es ist folchergeftalt $\text{GH} = \text{DB}$.

III. $\text{GHB} = R$. Denn man ziehe (Fig. 23.) BG, HD, so ist,

$$\begin{aligned}
 &\text{da } BD = HG \text{ (II.)} \\
 &\quad DG = DG \\
 &\quad BDG = HGD \text{ (p. hypoth.)}
 \end{aligned}$$

$$\triangle BDG \cong \triangle HGD \text{ (§. 4.) und } BG = HD.$$

Ferner da $BH = BH$
 $BD = HG \text{ (II.)}$
 $DH = GB$, wie so eben bewiesen worden ist,

$$\text{so ist } \triangle DBH \cong \triangle BHG \text{ (§. 7.) und } DBH = GHB.$$

Allein AH ist (p. hypoth.) *eine* gerade Linie
 also $ABD + HBD = 2 R \text{ (§. 12.)}$
 aber $ABD = R \text{ (p. hypoth.)}$
 demnach auch $HBD = R$
 und da $HBD = GHB$, wie eben bewiesen,

$$\text{so ist auch } GHB = R.$$

§. 23.

LEHRSATZ.

Wenn innerhalb eines Rechtecks, auf der einen Seite desselben ein Loth errichtet und bis auf die gegenüberliegende Seite verlängert worden ist; so bildet es auch auf dieser rechte Winkel.

Es seyen (Fig. 24.) in der vierseitigen Figur $ABCD$ die vier Winkel rechte Winkel und $EFC = R$, so ist auch $FEB = R$.

Beweis.

Man verlängere die AB , CD nach G , H , setze auf H die HG lothrecht (§. 10.), so ist auch $HGB = R$ (§. 22.). Da nun aber $ABD = R \text{ (p. hypoth.)}$, so ist

ist auch $GBD = R$ und daher auch HDB . Mithin ist $BGDH$ ein Rechteck und BA , DC als verlängerte Seiten desselben anzusehen. Da nun EF auf der einen dieser verlängerten Seite, nämlich auf CD lothrecht steht (per hypoth.), so ist auch $FEB = R$ (§. 22.)

Zusatz.

Ein solches Loth EF schneidet von den Linien auf welche es trifft, gleiche Theile ab und ist den andern Seiten des Rechtecks, die es nicht berührt, gleich. Denn da $EBD = BDF = DFE = R$ (p. hypoth.) und auch $FEB = R$ (p. demonstr.), so ist $EB = FD$ und $EF = BD$ (§. 21.). Aus demselben Grunde aber ist auch $AE = CF$ und $EF = AC$.

§. 24.

LEHRSATZ.

Ein jedes Rechteck wird durch die Diagonale in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

Es sey (Fig. 25.) in der vierseitigen Figur $ABCD$, in welcher alle Winkel rechte Winkel sind, die Linie AD gezogen, so ist $\triangle ACD \cong \triangle ABD$.

Beweis.

Da $ACD = ABD = R$ (p. hypoth.)

$$\left. \begin{array}{l} CA = BD \\ CD = BA \end{array} \right\} (\S. 21.)$$

so ist $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ (§. 4.)

§. 25.

LEHRSATZ.

Quadrate von gleichen Seiten sind sich gleich.

Es sey (Fig. 26.) $AC = CD = DB = BA = EG = GH = HF = FE$ und $BAC = ACD = CDB = DBA = FEG = EGH = GHF = HFE = R$, so ist auch das Quadrat ABCD dem Quadrat EFGH gleich.

Beweis.

Man ziehe AD, EH, so ist,

$$\left. \begin{array}{l} \text{da } AC = EG \\ \quad CD = GH \\ \quad ACD = EGH \end{array} \right\} \text{ (p. hypoth.)}$$

$$\Delta ACD = \Delta EGH \text{ (§. 4.)}$$

Es ist aber, nach §. 24, ΔACD die Hälfte von ACDB und ΔEGH , die Hälfte von EGHF, folglich $ACDB = EGHF$.

§. 26.

LEHRSATZ.

Gleiche Quadrate haben gleiche Seiten.

Es sey (Fig. 26.) $ABCD = EGHF$ und $AC = CD = DB = BA$ und $EG = GH = HF = FE$, auch die Winkel in beyden Figuren rechte Winkel; so sind $CD = GH$ und $DB = HF$ etc. etc.

Beweis.

Beweis.

Man nehme das Gegentheil an und es sey $CD \neq GH$, so verlängere man GH und mache $GI = CD$; und da alsdenn auch $GE \perp CA$, so verlängere man auch GE und mache $GK = CA$ (§. 3.) und ziehe KI , EH , AD .

Da nun $ABCD = EGHF$ (p. hypoth.)
und $\triangle ACD = \frac{1}{2}ABCD$ und $\triangle EGH = \frac{1}{2}EGHF$ (§. 24.)

so ist auch $\triangle ACD = \triangle EGH$

Ferner da $\triangle ACD = \triangle KGI$ (p. hypoth.)

$$\left. \begin{array}{l} CD = GI \\ CA = GK \end{array} \right\} \text{ (p. constr.)}$$

so ist $\triangle ACD = \triangle KGI$ (§. 4.)

allein $\triangle ACD = \triangle EGH$

folglich $\triangle KGI = \triangle EGH$, was ungereimt ist.
Es ist daher auch ungereimt, daß CD der GI nicht
gleich seyn sollte.

§. 27.

LEHRSATZ.

Das Quadrat von der Hälfte der Seite eines andern Quadrats, ist der vierte Theil desselben.

Es seyen (Fig. 27.) $ABCD$ und $HIKL$ Quadrate
und $KL = \frac{1}{2}CD$, so ist $HIKL$ der vierte Theil von
 $ABCD$.

Beweis.

Man theile die CD in zwey Theile, so daß
 $CE = DE$ (§. 9.) und stelle die FE auf E lothrecht
(§. 10.), so ist $EFB = R$ (§. 22.) und $FB = ED$
(§. 23. Zusatz.), also auch $FB = AF$, da, nach der
Vor-

Voraussetzung $AB = CD$. Auch ist $EF = AC$ (§. 23. Zusatz.) $= CD$.

Man theile nun die EF in zwey gleiche Theile (§. 9.), so dafs $EG = FG$, so ist auch $EG = CE = ED$ etc.

Auf G errichte man das Loth GF , so ist auch $GMC = R$ (§. 23.) und $GM = CE = ED = EG$ etc. und $FC = GE$ (§. 23. Zusatz.). Solchergestalt ist $MGCE$ ein Quadrat. Dieses ist aber dem Quadrat $AFMG$ gleich. Denn da $CM = CE$ also die Hälfte von AC , so ist $CM = AM = AF = FG = GM$ (§. 25.). Verlängert man nun die MG nach N , so ist $GND = R$ (§. 23.) und $GN = ED = EG = ND = NB = BF$ etc. Es entstehn also wieder zwey gleiche Quadrate, deren Seiten denen der andern $MGCE$, MGA , und die also auch ihnen selbst gleich sind (§. 25.).

Solchemnach ist das Quadrat $ABCD$ in vier gleiche Theile getheilt worden, von welchen ein jeder ein Quadrat ist. Nach der Voraussetzung aber ist $KL = \frac{1}{2} CD = CE$, und daher sind die Seiten des Quadrats $HIKL$, denen des Quadrats $MGCE$ und es also diesem selbst gleich (§. 25.), mithin aber eben so wohl, wie dieses der vierte Theil von $ABCD$.

§. 28.

LEHRSATZ.

In rechtwinklichen Dreyecken ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, den beyden Quadraten, der um den rechten Winkel herumliegenden Seiten gleich.

Es sey (Fig. 28.) in dem Dreyecke ABC der Winkel ABC ein rechter Winkel, so ist das Quadrat von AC , den Quadraten von AB und von BC gleich.

Beweis.

Beweis.

1) Man fälle von B aus ein Loth auf die AC (§. 11.), so fällt dieses zwischen A und C in F, denn fiel es auf die Verlängerung von AC, etwa in D, so wäre $BAC \supset R$ (§. 15.). Allein da $ABC = R$ (p. hypoth.), so ist auch, wenn man BA verlängert $EAC \supset R$ (§. 15.), mithin $EAC + BAC \supset 2R$, welches unmöglich ist (§. 12.). Eben so wenig kann das Loth in A oder C treffen, denn sonst wäre EAC nicht größer als ABC, wie doch bewiesen ist (§. 15.). Es fällt also in F.

Dieses Loth BF verlängere man nun bis G, so ist $FGH = R$ (§. 23.) und $FG = CH$, $FC = GH$ (§. 23. Zusatz.).

2) Man mache $GI = FB$ und ziehe IH, so ist,
 da $GH = FC$ (1)
 $GI = FB$ (per constr.)
 $IGH = BFC = R$

$\triangle GIH \cong \triangle FBC$ und $IH = BC$ (§. 4.)
 $FICH = FICH$

also $\left[\begin{array}{c} \triangle GIH + FICH \\ FGHC \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \triangle FBC + FICH \\ BIHC. \end{array} \right]$

3) Man ziehe FH, so ist $\triangle FCH = \frac{1}{2} FGHC$ (§. 24.) und zieht man auch BH, so ist

da $BI [= FI + BF = \left[\begin{array}{c} FI + IG \\ FG \end{array} \right] \text{ (p. constr.)}] = CH$ (1)

$IH = CB$ (2)

$BH = BH$

so ist $\triangle BIH = \triangle BCH$ (§. 7.) $= \frac{1}{2} BIHC$.

4) Da

4) Da $FGHC = BIHC$ (2)
 so ist $\frac{1}{2} FGHC = \frac{1}{2} BIHC$,
 aber $\triangle FCH = \frac{1}{2} FGHC$ und $\frac{1}{2} BIKC = \triangle BCH$ (3)

folglich $\triangle FCH = \triangle BCH$.

5) Man mache nun $LM = BA$ und ziehe MK ,
 so ist, da $LM = BA$

$$LK = BC$$

$$MLK = ABC = R$$

$$\triangle MLK = \triangle ABC \text{ und } MK = AC \text{ (§. 4.)}$$

$$\triangle MLK = \triangle ABC,$$

$$\triangle MBN = \triangle MBN$$

$$\text{also } \left[\begin{array}{c} MLK - MBN \\ BNLK \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} ABC - MBN \\ AMNC \end{array} \right]$$

$$\triangle NCK = \triangle NCK$$

$$\text{folglich } \left[\begin{array}{c} BNLK + NCK \\ BCLK \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} AMNC + NCK \\ AMKC \end{array} \right]$$

6) Man ziehe nun BK , so ist $\triangle BLK = \frac{1}{2} BCLK$
 (§. 24.) und die AK , so ist

$$\text{da } AK = AK$$

$$AC = MK \text{ (5)}$$

$$CK = [LB = \left[\begin{array}{c} LM \\ AB \end{array} \right] - MB =] AM.$$

$$\triangle AKC = \triangle AMK \text{ (§. 7.)} = \frac{1}{2} AMKC.$$

$$7) BCLK = AMKC \text{ (5)}$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2} BCLK = \frac{1}{2} AMKC,$$

$$\text{aber } \triangle BLK = \frac{1}{2} BCLK \text{ und } \frac{1}{2} AMKC = \triangle AKC \text{ (6)}$$

$$\text{mithin } \triangle BLK = \triangle AKC.$$

8) Da $ACH = BCK = R$ (p. hypoth.)
 $ACB = ACB$

so ist $\begin{cases} ACH + ACB \\ BCH \end{cases} = \begin{cases} BCK + ACB \\ ACK \end{cases}$
 ferner $\begin{cases} CH = AC \\ CB = CK \end{cases}$ als Seiten eines Quadrats

folglich $\triangle BCH = \triangle ACK$. (§. 4.)

9) $\triangle BCH = \triangle ACK$ (8)
 $\triangle BCH = \triangle FCH$ (4)

mithin $\triangle ACK = \triangle FCH$
 $\triangle ACK = \triangle BLK$ (7)

also $\triangle FCH = \triangle BLK$.

Aber $\triangle FCH = \frac{1}{2} FGHC$ (3) und $\triangle BLK = \frac{1}{2} BCLK$ (6)

folglich $\frac{1}{2} FGHC = \frac{1}{2} BCLK$

und $FGHC = BCLK$.

$BCLK$ aber ist das Quadrat von BC .

Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, daß das Quadrat von AB dem Rechtecke $AOGF$ gleich sey, welches zu wiederholen unnöthig ist. Es wird vielmehr mehr, als hinreichend seyn, zu bemerken, daß $IO = AB$, $IOAB = AFGO$, $\frac{1}{2} IOAB = \triangle ABO = \triangle AOF = \frac{1}{2} AFGO$. Daß ferner, wenn man PR der BC gleich mache, $\triangle PQR = \triangle ABC$ und daher

$$\begin{cases} \triangle PQR + QAPB \\ ABRQ \end{cases} = \begin{cases} \triangle ABC + QAPB \\ QAPC \end{cases}$$

Weiter daß $\triangle BQA = \frac{1}{2} ABRQ = \frac{1}{2} QAPC = \triangle QAC$, da $\triangle QAC = \triangle QPC$, wegen Gleichheit der Seiten.

Endlich daß $\triangle QAC = \triangle ABO$ und also $\frac{1}{2} QAPC = \triangle AOF = \frac{1}{2} AFGO$, woraus sich denn ergibt, daß $QAPC = ABRQ = AFGO$.

Solcher.

Solchergestalt sind die Quadrate von AB, BC
zusammengenommen dem Quadrate von AC gleich.

§. 29.

LEHRSATZ.

In einem jeden gleichschenkligen rechtwinklichen Dreyecke
sind die drey Winkel zusammengenommen zwey rechten
Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 29.) in dem Dreyecke ABC,
 $BA = BC$ und der Winkel ABC ein rechter Winkel;
so ist $BAC + ACB + ABC = 2R$.

Beweis.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Es ist } \overline{AC^2} &= \overline{AB^2} + \overline{BC^2} \text{ (§. 28.)} \\ \text{aber } AB &= BC \text{ (p. hypoth.)} \\ \text{also } \overline{AB^2} &= \overline{BC^2} \text{ (§. 25.)} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \overline{AC^2} = 2\overline{AB^2}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Man halbire } ABC \text{ (§. 8.), so ist} \\ \text{da } ABD &= CBD \\ BD &= BD \\ AB &= BC \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABD &\cong \triangle CBD \text{ (§. 4.)} \\ \text{und } AD &= DC = \frac{1}{2}AC \\ \text{auch } BDA &= BDC = R \text{ (§. 13.)} \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \overline{AB^2} = \overline{BD^2} + \overline{AD^2} \text{ (§. 28.)}$$

Da nun $AD = \frac{1}{2}AC$, so ist das Quadrat von AD,
dem vierten Theile des Quadrats von AC gleich
(§. 27.). Also

$$\overline{AB^2} = \overline{BD^2} + \frac{1}{4}\overline{AC^2}$$

$$3) \overline{AB}^q = \overline{BD}^q + \frac{1}{4} \overline{AC}^q \quad (2)$$

also auch $2 \overline{AB}^q = 2 \overline{BD}^q + \frac{1}{2} \overline{AC}^q$ (denn das Doppelte des viert. Theils
aber $2 \overline{AB}^q = \overline{AC}^q \quad (1)$ ist die Hälfte.)

$$\text{mithin } \overline{AC}^q = 2 \overline{BD}^q + \frac{1}{2} \overline{AC}^q$$

$$\frac{1}{2} \overline{AC}^q = \frac{1}{2} \overline{AC}^q$$

$$\text{folglich } \left\{ \overline{AC}^q - \frac{1}{2} \overline{AC}^q \right\} = \left\{ 2 \overline{BD}^q + \frac{1}{2} \overline{AC}^q - \frac{1}{2} \overline{AC}^q \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \overline{AC}^q \right\} = \left\{ 2 \overline{BD}^q \right\}$$

Nimmt man auf beyden Seiten die Hälfte,

$$\text{so ist } \frac{1}{4} \overline{AC}^q = \overline{BD}^q$$

$$\text{nun ist } \overline{AD}^q = \frac{1}{4} \overline{AC}^q \quad (\S. 27.)$$

$$\text{und } \overline{AD}^q = \overline{BD}^q$$

$$\text{daher } AD = BD \quad (\S. 26.)$$

4) Da $AD = BD \quad (3)$, so ist

$$BAD = ABD \quad (\S. 5.)$$

$$\text{aber } ABD = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} R \quad (\text{p. constr. 2})$$

$$\text{folglich } BAD = \frac{1}{2} R.$$

und da $AB = BC$ (p. hypoth.) und also $BAD = ACB$,
so ist auch $ACB = \frac{1}{2} R.$

$$5) \text{ Es ist also } \left. \begin{array}{l} BAC = \frac{1}{2} R \\ ACB = \frac{1}{2} R \end{array} \right\} \quad (\text{p. demonstr. 4.})$$

$$ABC = R \quad (\text{p. hypoth.})$$

$$\text{mithin } BAC + ACB + ABC = 2 R.$$

Zusatz.

Zusatz.

In gleichschenkligen rechtwinklichen Drey-ecken ist jeder der beyden Winkel an der Hypothe-nuse ein halber rechter Winkel.

§. 30.

LEHRSATZ.

In einem jeden rechtwinklichen Dreyecke sind die drey Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 30.) in dem Dreyecke ABC der Winkel ABC ein rechter, aber $AB \neq BC$, so sind dennoch die drey Winkel des Dreyecks, nämlich BAC, BCA, ABC, zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis.

1) Man mache $BD = BC$ (§. 3.), so ist $BDC = BCD$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (§. 29. Zusatz.). Man setze nun auf A das Loth AE (§. 10.) und mache $AE = AD$ (§. 3.) und ziehe ED, so ist $AED = EDA$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (§. 29. Zusatz.),

$$\begin{aligned} \text{also } BDC &= EDA \\ ADC &= ADC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BDC + ADC &= EDA + ADC \\ BDC + ADC &= 2 R \quad (\S. 12.) \end{aligned}$$

daher $EDA + ADC = 2 R$ und EC eine gerade Linie. (§. 13.)

2) Man

2) Man verlängere BC und mache $BF = BA$ und ziehe AF, so ist $BAF = BFA$ (§ 5.) $= \frac{1}{2} R$ (§. 29. Zusatz.) und $FC = \left(\begin{smallmatrix} BF \\ BA \end{smallmatrix} \right) - \left(\begin{smallmatrix} BC \\ BD \end{smallmatrix} \right) = DA = AE$ (p. constr.)

$$\begin{aligned} 3) \quad DCB + DCF &= 2 R \text{ (§. 12.)} \\ DGB &= \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)} \end{aligned}$$

mithin $DCF = 1\frac{1}{2} R$.

$$\begin{aligned} \text{Ferner} \quad BAF &= \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)} \\ BAE &= R \text{ (p. constr.)} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} BAF + BAE \\ EAF \end{smallmatrix} \right) = 1\frac{1}{2} R$$

und demnach $DCF = EAF$

$$\begin{aligned} AED &= CFA = \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)} \\ FC &= AE \text{ (2)} \end{aligned}$$

folglich $AF = EC$ (§. 21. Zuf.)

$$\begin{aligned} 4) \quad \text{Da nun} \quad AC &= AC \\ FC &= AE \text{ (2)} \\ AF &= EC \text{ (3)} \end{aligned}$$

so ist $\triangle ACF \cong \triangle AEC$ (§. 7.)

und $FAC = ACE$

denn diese Winkel werden von den gleichen Seiten AF, AC und CE, CA eingeschlossen.

$$5) \text{ Da } BAC + FAC = BAF = \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)}$$

$$FAC = ACE \text{ (4)}$$

$$\text{so ist } BAC + ACE = \frac{1}{2} R$$

$$\text{aber } BCD = \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)}$$

$$\text{mithin } BAC + \left\{ \begin{array}{c} ACE + BCD \\ BCA \end{array} \right\} = R$$

$$\text{und da auch } ABC = R \text{ (p. hypoth.)}$$

so ist $BAC + BCA + ABC = 2 R$,
und dieses sind gerade die drey Winkel des ungleichschenkligen, rechtwinklichen Dreyecks ABC .

Anderer Beweis.

1) Man mache $BD = BC$ (§. 3.) so ist
 $BDC = BCD$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (§. 29. Zuf.)

Man setze nun an den Punkt A der Linie AB , den rechten Winkel EAB (§. 10.) und mache $AE = AD$ (§. 3.) und ziehe ED , so ist

$$AED = EDA \text{ (§. 5.)} = \frac{1}{2} R \text{ (§. 29. Zuf.)}$$

$$\text{also } \left(\begin{array}{c} BDC \\ \frac{1}{2} R \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} EDA \\ \frac{1}{2} R \end{array} \right)$$

$$ADC = ADC$$

$$BDC + ADC = EDA + ADC$$

$$\text{aber } BDC + ADC = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

folglich $EDA + ADC = 2 R$
 und EC eine gerade Linie. (§. 13.)

2) Man verlängere BC und mache $BF = BA$ und ziehe AF , so ist $BAF = BFA$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (§. 29. Zuf.) $= AED$ (1) und $FC = \left\{ \begin{array}{c} BF \\ BA \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} BC \\ BD \end{array} \right\}$
 $= DA = AE$ (p. constr.)

3) Ich

3) Ich behaupte nun daß $EC = AF$.
 Denn gesetzt EC sey größer, als AF , so schneide man von ihr ein Stück $EG = AF$ ab (§. 3.) und ziehe GA , so ist, da

$$\begin{aligned} EG &= AF \\ AE &= FC \quad (2) \\ \text{und } AEG &= AFC = \frac{1}{2} R \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle AEG &\cong \triangle AFC \quad (\S. 4.) \\ \text{und } AG &= AC, \text{ mithin } AGC = ACG \quad (\S. 5.) \end{aligned}$$

Das ist aber unmöglich, denn
 $AGE > ACG \quad (\S. 15.)$
 also $AGE > AGC \quad (\S. 5.)$
 und folglich $AGC < R$, da $AGE + AGC = 2R \quad (\S. 12.)$
 Aber $AGC > ADC > \left(\frac{ABC}{R} \right) \quad (\S. 15.)$

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß EC auch nicht kleiner, als AF sey, denn alsdenn braucht man EC nur so lange zu verlängern, bis sie der EF gleich ist, und man erhält das Resultat, daß $ACE > R$, da doch $\left(\frac{BDC}{\frac{1}{2} R} \right) > ACE \quad (\S. 15.)$

4) Ist nun also

$$\begin{aligned} EC &= AF \quad (3) \\ AE &= FC \quad (2) \\ \text{und } AC &= AC \end{aligned}$$

so ist $\triangle EAC \cong \triangle AFC \quad (\S. 7.)$
 und $EAC = ACF$
 da diese Winkel von den gleichen Seiten AE , AC und CF , AC eingeschlossen werden.

5) Es ist nun

$$ACB + ACF = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

$$\text{aber } ACF = EAC \text{ (4)}$$

$$\text{also } ACB + \begin{pmatrix} EAC \\ EAD + BAC \end{pmatrix} = 2 R.$$

da nun $EAD = R$ (p. constr.) $= ABC$ (p. hypoth.)

$$\text{so ist } ACB + ABC + BAC = 2 R.$$

Dritter Beweis.

Die Gleichheit der Linien AF und EC (2ter Beweis n. 3.) kann nämlich auf folgende Weise direkt bewiesen werden.

$$ACB + ACF = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

$$ACF > \begin{Bmatrix} ABC \\ R \end{Bmatrix} \text{ (§. 15.)}$$

$$\text{also } ACB < R.$$

$$EAD = R \text{ (p. constr.)}$$

$$\text{mithin } \begin{Bmatrix} EAC \\ EAD + BAC \end{Bmatrix} > R$$

$$\text{und } EAC > ACB.$$

Man setze nun an den Punkt C der Linie AC einen Winkel $ACH = EAC$ an (§. 20.) und mache $CH = AE$ (§. 5.) und ziehe AH, so ist $\triangle ACH \cong \triangle AEC$ (§. 4.) und

$$\text{a) } AH = EC$$

$$\text{b) } AHC = AEC = \frac{1}{2} R \text{ (1).}$$

Man ziehe nun HF so ist, da

$$CH = AE \text{ (p. constr.)} = FC \text{ (2)}$$

$$CHF = CFH \text{ (§. 5.)}$$

$$\text{aber } AHC = \frac{1}{2} R \text{ (b)} = BFA \text{ (2)}$$

$$\text{mithin } \begin{Bmatrix} CHF + AHC \\ AHF \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} CFH + BFA \\ AFH \end{Bmatrix}$$

$$\text{also } AF = AH \text{ (§. 6.)} = EC \text{ (a).}$$

Vierter Beweis.

Auch auf folgende Weise:

Man errichte aus den drey Linien AF, AB, BF auf AF das Dreyeck AIF (§. 19.) welches also dem Dreyeck ABF gleich und ähnlich ist (§. 7.), so daß

a) $AIF = ABF = R.$

b) $IAF = IFA = BAF \text{ etc. } = \frac{1}{2} R (2)$
und ziehe hierauf EI, so ist

c) $\left\{ \begin{array}{l} IAF \\ \frac{1}{2} R (b) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} BAF \\ \frac{1}{2} R (2) \end{array} \right\} = BAI = R = BAE \text{ (p. constr.)}$

also $BAI + BAE = 2R$ und EI eine gerade Linie (§. 13.)

Da nun $AB = AB$, $AI = BF$ (p. constr.), $BAI = R (c) = ABF$, so ist $\triangle AIB \cong \triangle BFA$ (§. 4.) und

d) $IB = AF$, und

e) $\left\{ \begin{array}{l} AIB \\ ABI (\S. 5.) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} BAI \\ \frac{1}{2} R (2) \end{array} \right\}$

Folglich $\left\{ \begin{array}{l} KEI \\ AED \\ \frac{1}{2} R (1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} KIE \\ AIB \\ \frac{1}{2} R (e) \end{array} \right\}$ mithin $KE = KI$ (§. 6.)

$\left\{ \begin{array}{l} KBC \\ ABC - ABI \\ R - \frac{1}{2} R (e) \\ \frac{1}{2} R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} KCB \\ BCD \\ \frac{1}{2} R (1) \end{array} \right\}$ mithin $KC = KB$ (§. 6.)

Mithin $\left\{ \begin{array}{l} KE + KC \\ EC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} KI + KB \\ IB \\ AF (d) \end{array} \right\}$

Anmerkung.

Es wäre ein leichtes die Zahl der Beweise noch beträchtlich zu vermehren.

§. 31.

LEHRSATZ.

In einem jeden Dreyecke sind die drey Winkel zusammen-
genommen zwey rechten Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 31.) das Dreyeck ABC, oder das Dreyeck DEF nicht rechtwinklich, so sind doch die drey Winkel eines jeden, ABC, BCA, CAB, wie auch DEF, EFD, FDE zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis.

Man fälle aus der Spitze C des Dreyecks ABC ein Loth auf die Grundlinie AB, oder wenn dieß nicht möglich ist, wie im stumpfwinklichen Dreyeck DEF, aus F auf die verlängerte Grundlinie EH (§. 11.).

1) Im ersten Fall ist

$$\text{und auch } \left. \begin{array}{l} \text{CGA} + \text{GAC} + \text{ACG} = 2 \text{ R} \\ \text{CGB} + \text{GCB} + \text{CBG} = 2 \text{ R} \end{array} \right\} (\S. 30.)$$

$$\text{also } \text{CGA} + \text{CGB} + \text{GAC} + \left\{ \begin{array}{c} \text{GCB} + \text{ACG} \\ \text{ACB} \end{array} \right\} + \text{CBG} = 4 \text{ R}$$

$$\text{aber } \text{CGA} + \text{CGB} = 2 \text{ R } (\S. 112.)$$

$$\text{folglich } \text{CGA} - \text{CGB} + \text{CGA} + \text{CGB} + \text{GAC} + \text{ACB} + \text{CBG} = 2 \text{ R} + 4 \text{ R}$$

$$\text{oder } \text{GAC} + \text{ACB} + \text{CBG} = 2 \text{ R}$$

und dieses sind die drey Winkel des Dreyecks ABC.

2) Im zweyten Fall, wenn das Loth FH auf die verlängerte Grundlinie ED fällt, ist

$$FHE + HEF + \left\{ \begin{array}{l} EFH \\ EFD + DFH \end{array} \right\} = 2R \quad \left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} EFH \\ EFD + DFH \end{array} \right\}} \right\} (\S. 30.)$$

Auch $FHE + HDF + DFH = 2R$

Also $FHE + HEF + EFD + DFH = FHE + HDF + DFH$,
zieht man nun

$$FHE + DFH = FHE + DFH$$

von beyden Seiten ab,

$$\begin{array}{l} \text{so ist} \quad HEF + EFD = HDF \\ \text{aber} \quad FDE = FDE \end{array}$$

mithin $HEF + EFD + FDE = HDF + FDE = 2R (\S. 12.)$
 $\left[\begin{array}{l} HEF \\ DEF \end{array} \right]$, EFD , FDE sind aber die drey Winkel des
 Dreyecks DEF .

§. 32.

LEHRSATZ.

*In einem jeden Dreyecke ist, wenn man eine Seite verlängert,
 der äußere Winkel seinen beyden innern Gegenwinkeln
 gleich.*

Es sey (Fig. 32.) in dem Dreyecke ABC die
 Seite BC verlängert; so ist $ACD = ABC + BAC$.

Beweis.

$$\begin{array}{l} ACD + ACB = 2R \quad (\S. 12.) \\ ABC + BAC + ACB = 2R \quad (\S. 31.) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Also} \quad ACD + ACB = ABC + BAC + ACB \\ \quad \quad \quad - ACB = \quad \quad \quad - ACB \end{array}$$

$$\text{mithin} \quad ACD = ABC + BAC.$$

§. 33.

LEHRSATZ.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass sie die Wechselwinkel gleich macht; so sind auch die äussern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel einander gleich und die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten Winkeln gleich.

Es werden (Fig. 33.) die Linien AB, CD, von der EF so geschnitten, dass $AGF = EHD$, so ist $EHD = EGB$, $EHC = AGE$, $AGF = CHF$, $BGI = DHF$; und $BGF + DHE = AGF + CHE = 2 R.$

Beweis.

$$AGF = EHD \text{ (p. hypoth.)}$$

$$AGF = EGB \text{ (§. 14.)}$$

folglich $EHD = EGB$ und ganz aus denselben Gründen $EHC = AGE$, $AGF = CHF$ und $BGF = DHF$, denn wenn $AGF = EHD$, wie vorausgesetzt wird und $AGF + BGF = EHD + EHC = 2 R \text{ (§. 12.)}$

$$\text{so ist auch } \begin{Bmatrix} BGF \\ AGE \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EHC \\ DHF \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Ferner weil eben } AGF + BGF = 2 R \text{ (§. 12.)} \\ \text{und } AGF = EHD$$

$$\text{so ist auch } \begin{Bmatrix} EHD \\ AGF \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} BGF \\ CHE \end{Bmatrix} = 2 R.$$

Zusatz 1.

Aus der Gleichheit der alternirenden Winkel folgt also unmittelbar die Gleichheit der innern Winkel mit ihren Gegenwinkeln und die Gleichheit der beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel,

kel, mit zwey rechten Winkeln. Allein die Gleichheit der Wechselwinkel ergibt sich eben so auch umgekehrt, aus der der innern Winkel mit den an einerley Seite liegenden Gegenwinkeln, oder aus Gleichheit der beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel mit zwey rechten Winkeln. Wenn also eins von diesen drey Stücken gegeben ist; so sind es auch die übrigen.

Zusatz 2.

Solche Linien können auch verlängert niemals zusammentreffen, denn es geschehe dies im Punkt I,

so ist $HGI + GHI + GIH = 2 R$ (§. 31.)

aber $HGI + GHI = 2 R$ (p. demonstr.)

also $HGI + GHI + GIH = HGI + GHI$, welches absurd ist.

Zusatz 3.

Wenn gefodert würde, durch einen Punkt G eine Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen Linie CD niemals zusammentreffen könne, man möge beyde verlängern, so weit als man wolle; so braucht man nur von G auf CD eine Linie GH nach Willkühr ziehen und HG einen Winkel setzen, der dem Winkel GHD gleich sey (§. 20.) und endlich den Schenkel AG nach B verlängern; so ist das Gefoderte geleistet (Zus. 2.)

§. 34.

LEHRSATZ.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass sie die Wechselwinkel gleich macht; so sind alle Lothe, welche auf der einen jener Linien errichtet und bis zu der andern verlängert worden sind von gleicher Länge und bilden mit beyden Linien rechte Winkel.

Es werden (Fig. 34.) die AB, CD von der EF so geschnitten, dass $\angle AEF = \angle DFE$, und es seyen $\angle GHF$, $\angle IKM$, $\angle MLI$ rechte Winkel; so sind die Linien GH, IK, LM sich gleich und $\angle HGI$, $\angle KIL$, $\angle LMK$ rechte Winkel.

Beweis.

Man lasse von E auf die CD das Loth EN fallen (§. 11.), mache $EO = FN$ (§. 3.) und ziehe FO, so ist

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{Da } EO = FN \text{ (p. constr.)} \\ & EF = EF \\ & \angle OEF = \angle FEN \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$\triangle OEF \cong \triangle FEN$ (§. 4.) und $\angle FOE = \angle FNE = R$,
und $\angle OFE = \angle NEF$.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \angle FEN + \angle NEF + \angle FNE = 2R \text{ (§. 30.)} \\ & \angle FNE = R \text{ (p. constr.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{also } \angle FEN + \angle NEF = R. \\ & \text{aber } \angle OFE = \angle NEF \text{ (1)} \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \begin{Bmatrix} \angle FEN + \angle OFE \\ \angle OFN \end{Bmatrix} = R.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \angle OFE = \angle NEF \text{ (1)} \\ & \angle FEN = \angle OEF \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$$\text{also } \begin{Bmatrix} \angle OFE + \angle FEN \\ \angle OFN \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \angle NEF + \angle OEF \\ \angle OFN \end{Bmatrix} = R \text{ (2).}$$

4) Es ist also OEFN ein Rechteck und EB, ND verlängerte Seiten desselben, also $EN = GH = IK = LM$ und $HGI = KIL = LMK = R$ (§. 22.)

§. 35.

LEHRSATZ.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass sie die Wechselwinkel gleich macht; so macht auch jede andere gerade Linie, welche jene beyden Linien schneidet, die Wechselwinkel gleich.

Es werden (Fig. 35.) AB, CD, von der EF so geschnitten, dass $AEF = EFD$ und es schneide GH, die AB, CD ebenfalls, so ist $GHI = HGK$.

Beweis.

Man fälle von G auf CD und von H auf AB die Lothe GI, HK, so ist $GI = HK$ und $KHI = KGI = R$ (§. 34.), folglich $KG = HI$ (§. 21.) und da $GH = GH$; so ist $\triangle GHK \cong \triangle GHI$ (§. 7.) und $KGH = GHI$, weil diese Winkel von den gleichen Seiten KG, GH und IH, HG eingeschlossen werden.

§. 36.

LEHRSATZ.

Wenn von drey geraden Linien die erste und zweyte von einer andern so geschnitten werden, dass die Wechselwinkel gleich sind, und die zweyte und dritte Linie unter eben dieser Bedingung von einer andern Linie geschnitten werden; so macht auch eine jede Linie, welche die erste und dritte schneidet, gleiche Wechselwinkel.

Es sey (Fig. 36.) $AGH = GHI$ und $CIK = IKF$, so ist auch $ALM = LMF$.

Beweis.

Beweis.

Da $AGH = GHI$ (p. hypoth.), so ist $ALN = LND$ (§. 35.) $= CNM$ (§. 14.), aber $CNM = NMF$ (§. 35.), also $ALM = NMF$.

§. 37.

LEHRSATZ.

Wenn zwey gleiche gerade Linien, von einer dritten so geschnitten werden, dass die Wechselwinkel gleich sind; so sind die geraden Linien, welche die Endpunkte derselben an einerley Seite verbinden ebenfalls gleich und bilden mit jeder andern geraden Linie, die sie schneidet, gleiche Wechselwinkel.

Es sey (Fig. 37.) $AB = CD$ und $AEF = EFD$, so ist $AC = BD$ und $AGH = GHD$.

Beweis.

Man ziehe AD , so ist

$$BAD = ADC \text{ (§. 35.)}$$

$$AD = AD$$

$$AB = DC \text{ (p. hypoth.)}$$

demnach $\triangle ABD \cong \triangle ADC$ (§. 4.)

und $BD = AC$, auch $ADB = DAC$.

Da nun also die AD mit den beyden CA , BD , gleiche Wechselwinkel macht; so ist dieß auch der Fall mit einer jeden andern sie schneidenden Linie GH (§. 35.). Es ist daher bewiesen, dass $BD = AC$ und $AGH = GHD$.

Anmerkung.

Alle Eigenschaften der Parallelogramme sind Analysen dieses Satzes und brauchen nicht besonders angeführt zu werden.

§. 38.

LEHRSATZ.

Wenn mehrere gleiche Linien mit einer geraden Linie nach derselben Seite hin, gleiche Winkel bilden; so sind die Endpunkte derselben, in einer geraden Linie. Auch sind die Winkel die sie mit dieser bilden verwechselt denen gleich, unter welchen sie auf jener Linie stehn.

Es sey (Fig. 38.) $CD = EF = GH = IK$ und $CDF = EFH = GHB = IKH$; so ist CE, EG, GI eine gerade Linie und $DCE = FEG = HGI = KIG = CDA$ etc.

Beweis.

Man verlängere die CD nach N , da $CDF + NDF = 2 R$ (§. 12.) $= EFH + EFD$ und $CDF = EFH$ (p. hypoth.), so ist $NDF = EFD$. Die CD, EF werden also von der DF so geschnitten, daß gleiche Wechselwinkel entstehn und daher $CEF = EFH$ (§. 37.), denn es ist, nach der Voraussetzung $CD = EF$.

Aus eben diesen Gründen aber schneidet die FH , die beyden EF, GH , wenn man sie sich als verlängert vorstellt, so, daß gleiche Wechselwinkel entstehn, (§. 35. Zus. 1.) denn $EFH = GHK$ (ex hypoth.) also $EFH + GHF = GHK + GHF = 2 R$ (§. 12.). Mithin ist auch $EGH = GHK, GEF = DFE$ (§. 37.) und da $CEF = EFH, DFE + EFH = 2 R$ (§. 12.), so ist auch $CEF + GEF = 2 R$ und CEG eine gerade Linie (§. 13.).

Man lasse nun von I auf die AB das Loth IL fallen (§. 11.), mache $LM = LK$ (§. 3.) und ziehe IM , so ist $\triangle ILM \cong \triangle ILK$ (§. 4.) und $IM = \begin{Bmatrix} IK \\ GH \text{ etc.} \end{Bmatrix}$

$$IML = \begin{Bmatrix} IKL \\ GHM \text{ etc.} \end{Bmatrix}$$

Wenn

Wenn aber $GHM = IML$ so werden die GH , IM , wenn man sie verlängert, von der HM so geschnitten, daß gleiche Wechselwinkel entstehen und daher auch, da, wie bewiesen worden ist, $GH = IM$, $IGH = GHF$ (§. 37.). Aber, nach dem obigen, $EGH = GHK$, folglich $IGH + EGH = GHF + GHK = 2R$ (§. 12.) und daher $CEGI$ eine gerade Linie (§. 13.).

Es ist aber auch bewiesen, daß $CEF = EFH$, folglich bildet jede, die AB , CI schneidende Linie gleiche Wechselwinkel und $DCE = ADC = AFE = GEF$ etc. etc. $CEF = EFH = GHK = HGE = IKH = KIO$ etc. (§. 35.) und daher sind die Winkel, welche CD , EF , GH , IK mit der CO bilden verwechselt denen gleich, unter welchen sie auf der AB stehn.

§. 39.

LEHRSATZ.

Dreyecke auf gleicher Grundlinie und von gleicher Höhe sind sich dem Inhalte nach gleich.

Es sey (Fig. 39.) in den Dreyecken ABC , DEF , $BC = EF$, auch seyen die Lothe, welche von den Spitzen A , D , auf die Grundlinien, oder deren Verlängerung gefällt werden, von gleicher Länge, so sind sich beyde Dreyecke dem Inhalte nach gleich.

Beweis.

1) Man verlängere die EF nach G und mache $FH = BC = EF$ (§. 3.), sodenn mache man $IFH = ABC$ (§. 20.) und $IF = AB$ und ziehe IH , so ist $\triangle IFH \cong \triangle ABC$ (§. 4.) und was von jenem bewiesen wird, gilt auch von diesem. Nun lasse man auf die EG , von D , I , die Lothe DL , IK (§. 11.) fallen, welche sich gleich sind (p. hypoth.) und errichte in E , F , Lothe (§. 10.), so, daß $EM = FN = LD = KI$;
so

so geht die gerade Linie MI durch D, N (§. 38.) und $LDN = ELD = R = LDM = EMD = MNF = MIK$ (§. 38.). Solchemnach $MI = EK$, $MD = EL$, $DN = LF$, $NI = FK$ (§. 21. 23.)

2) Da $MD = EL$ (1) $ME = LD$ (p. constr.) $DE = DE$, so ist $\triangle MDE = \triangle DEL$ (§. 7.) Eben so ist $\triangle DNF = \triangle DLF$, denn auch in diesen sind die drey Seiten stückweise gleich. Also ist $\triangle MDE + \triangle DNF = \begin{Bmatrix} \triangle DEL + \triangle DLF \\ \triangle DEF \end{Bmatrix}$ und $MNEF = 2 \triangle DEF$, und $\triangle DEF = \frac{1}{2} MNEF = \triangle NEF$ (§. 24.)

2) Da $NI = FK$, so ist $NI > FH$. Man mache $IO = FH$ (§. 3.) und ziehe FO, so ist, da $OIF = IFH$ (§. 35.), $\triangle OFI = \triangle IFH$ (§. 4.) und $OIHF = 2 \triangle IFH$.

3) Man errichte auf H das Loth HP (§. 10.), so ist $HP = FN$, $PI = HK$, $PN = FH$ (§. 25. Zusatz.), $HPI = R$ (§. 23.)

Da nun $\begin{pmatrix} OI \\ OP + PI \end{pmatrix} = FH$ (p. constr. 2.)

und $\begin{pmatrix} PN \\ OP + NO \end{pmatrix} = FH$, wie so eben bewiesen worden ist,

so ist $OP + PI = OP + NO$ und $PI = NO$.

aber $PH = NF$ (§. 25. Zuf.)
und $HPI = FNO = R$ (§. 23.)

mithin $\triangle PHI = \triangle NFO$ (§. 4.)

Es ist aber $OIHF = OPHE + \triangle PHI$

folglich $OIHF = \begin{Bmatrix} OPHE + \triangle NFO \\ NPFH \end{Bmatrix}$

Da nun $OIHF = 2 \triangle IFH$, so ist auch das Rechteck $NPFH = 2 \triangle IFH$ und $\triangle IFH = \frac{1}{2} NPFH = \triangle NFH$ (§. 24.)

4) Da

4) Da endlich $FN = FN$
 $FE = FH$
 $NFE = NFH = R$ (p. constr.)

so ist $\left\{ \begin{array}{l} \triangle NEF \\ \triangle DEF (1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \triangle NFH \\ \triangle IFH (3) \end{array} \right\}$ (§. 4.)
 aber $\triangle ABC = \triangle IFH (1)$

folglich $\triangle DEF = \triangle ABC.$

§. 40.

LEHRSATZ.

Dreyecke, von gleichem Inhalte und auf gleicher Grundlinie, haben gleiche Höhe.

Es sey (Fig. 40.) $\triangle ABC = \triangle EFG$ und $BC = FG$;
 so ist das Loth AD , dem Lothe EH gleich.

Beweis.

Es sey BH eine Linie. Man nehme nun an, daß $EH > AD$, so mache man $HI = AD$ (§. 5.) und ziehe AI , so ist, da $ADH + IHD = 2R$, und also eine jede Linie, welche die AD , IH schneidet, die Wechselwinkel gleich macht (§. 33. Zuf. 1. und §. 35.), $IAD = ADB = R$ (§. 37.) und auch $AIH = R$. Von K lasse man nun auf die BH das Loth KL fallen (§. 11.), so ist $KL = AD$ (§. 23. Zusatz.) und $\triangle KFG = \triangle ABC$ (§. 39.) $= \triangle EFG$ (p. hypoth.) aber $\triangle EFG = \triangle KFG + \triangle KEG$, welches sich widerspricht, es ist daher auch widersprechend anzunehmen, daß EH der AD ungleich sey.

u. f. w.

Zweyter Abfchnitt.

Die Construction des Quadrats.

Zweiter Abschnitt.

Die Construction des Quadrats.

I. LEHRSATZ.

Wenn von zwey rechtwinklichen Dreyecken auf gleicher Hypothenuse, das eine gleichschenkelig ist, so ist in dem andern die grössere Cathete grösser, und die kleinere kleiner, als eine Cathete des ersteren, und der grössere Winkel an der Hypothenuse grösser, der kleinere aber kleiner, als ein Winkel an der Hypothenuse des gleichschenkelichen.

Es seyen (Fig. 51. 52.) die beyden Dreyecke **ABC**, **DEF** rechtwinklich, auch seyen die Hypothenusen **AC**, **DF** gleich, **ABC** aber gleichschenkelig und also $AB = BC$, $ACB = BAC$ (§. 5.) in **DEF** hingegen $DE > EF$ und also $DFE > EDF$ (§. 16.), so behaupte ich, dafs $AB \left\{ \begin{array}{l} > EF \\ < DE \end{array} \right\}$ und $BAC \left\{ \begin{array}{l} > EDF \\ < DFE \end{array} \right\}$

Beweis.

Man lege das Dreyeck **DEF** auf **ABC**, so dafs **D** auf **A**, und **F** auf **C** zu liegen kommt, so fällt **E** auf **G**, so nämlich, dafs eine Cathete von **DEF** in, und die andere ausser dem Dreyecke **ABC** liegt, denn unmöglich können beyde in, oder beyde ausser

G 2

dasselbe

dasselbe fallen, da, nach der Voraussetzung $ABC = DEF = R$ nicht in dasselbe, wie AH , CH , oder AI , CI , denn $AHC > ABC$ (§. 15.) und auch $AIC > ABC$, weil $AIC > AHC$ (§. 15.), nicht ausser dasselbe, wie AK , CK , oder AL , CL , weil $ABC > AKC > ALC$ (§. 15.)

Man ziehe nun BG , so ist da

$$ABC = R \text{ (p. hyp.)}$$

$$ABG > R$$

$$ABG + KBG = 2R \text{ (§. 12.)}$$

$$\text{also } KBG < R < ABG$$

$$KBG > BGA \text{ (§. 15.)}$$

$$BGA < ABG$$

folglich $AB < \begin{Bmatrix} AG \\ DE \end{Bmatrix}$ welches das erste war.

Ferner $\begin{Bmatrix} AGC \\ DEF \end{Bmatrix} = R \text{ (p. hyp.)}$

$$BGC > R$$

$$BGC + BGK = 2R \text{ (§. 12.)}$$

$$BGK < R < BGC$$

$$BGK > GBC \text{ (§. 15.)}$$

$$GBC < BGC$$

folglich $\begin{Bmatrix} GC \\ EF \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} BC \\ AB \end{Bmatrix}$, welches das zweyte war.

Endlich, da die Catheten, DE , FE erwiesenermaßen die Lage AG , CG haben und also $\begin{Bmatrix} DE \\ AG \end{Bmatrix}$

zwischen AB , AC , hingegen BC zwischen $\begin{Bmatrix} GC \\ EF \end{Bmatrix}$

und $\begin{Bmatrix} AC \\ DF \end{Bmatrix}$ fällt, so ist $BAC > \begin{Bmatrix} GAC \\ EDF \end{Bmatrix}$ welches das

dritte und $\begin{Bmatrix} BCA \\ BAC \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} GCA \\ EFD \end{Bmatrix}$ welches das vierte war.

II. LEHRSATZ.

Wenn von zwey rechtwinklichen Dreyecken auf gleicher Hypothense, das eine gleichschenkelig ist; so ist es dem Inhalte nach gröfser, als das andere.

Es seyen (Fig. 53. 52.) die zwey Dreyecke ABC , DEF gegeben und $ABC = DEF = R$, $AC = DF$, $AB = CB$, $DE > FE$; so behaupte ich, dafs das Dreyeck ABC dem Inhalte nach gröfser sey, als das Dreyeck DEF .

Beweis.

Man lege das Dreyeck DEF auf das Dreyeck ABC , so dafs D auf A und F auf C fällt, so hat DEF die Lage AGC (I.) und $HAC < \begin{pmatrix} BAC \text{ (I.)} \\ BCA \text{ §. 5.)} \end{pmatrix}$ und $HC < HA$ (§. 17.). Man schneide hierauf von HA ein Stück $HI = HC$ ab (§. 3.). Nun behaupte ich dafs $HB > HG$. Denn gesetzt dafs $HB = HG$, so ziehe man BI und es ist $\triangle HBI \cong \triangle HCG$ (§. 4.), weil auch $BHI = GHC$ (§. 14.) und also $IB = GC$ und $IBH = HGC$, weil diese Winkel von den gleichen Seiten BH , BI und GH , GC eingeschlossen werden. Da nun $HGC = R = ABC$ (p. hyp.), so wäre auch $IBH = ABH$, was unmöglich ist. Eben so wenig kann HB kleiner seyn, als HG , denn sonst hätte man nur die HB zu verlängern, bis $HK = HG$ und es wäre, wie vorhin $\triangle KIH \cong \triangle GCH$ und $HKI = HGC = ABC$, da doch $ABC > HKI$ (§. 15.).

Ist nun also $HB > HG$, so schneide man davon ein Stück $HL = HG$ ab (§. 3.), und ziehe LI , so ist da auch $HI = HC$ (p. constr.) und $LHI = GHC$ (§. 14.),

(§. 14.), $\triangle LIH = \triangle GHC$ (§. 4.) und folglich
 $\triangle LIH + \triangle IAB = \triangle HBA > \triangle GHC$, und mithin

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle LIH + \triangle IAB \\ \triangle HBA \\ \triangle ABC \end{array} \right\} + \triangle AHC > \left\{ \begin{array}{l} \triangle GHC + \triangle AHC \\ \triangle AGC \\ \triangle DEF \end{array} \right\}$$

Anmerkungen.

1) Den bisherigen Darstellungen der Parallelen-theorie hat es hauptsächlich daran gefehlt, daß sie auf den Inhalt keine Rücksicht genommen haben. (Siehe die Einl.) Eben darum aber sollte es mich wenig wundern, wenn man mir die Erlaubniß, aus ihm zu folgern, streitig machen würde. Allein nicht zu gedenken, daß auch *Euclides*, selbst in den ersteren Sätzen nicht Anstand nahm, aus dem größern, oder kleinern Inhalte der Dreyecke auf ihre Ungleichheit zu schliessen; so bliebe es denn doch wohl immer vorzüglicher, selbst die Begriffe des Körperlichen in den Anfang hineinzuziehen, als in der Kette zu beweisender Sätze eine Lücke zu lassen. Uebrigens mache ich mich anheischig, die Demonstration des Lehrf. V., dem es eigentlich gilt, auch *ohne* den obigen Satz, auszuführen.

2) Der obige Lehrsatz läßt sich viel allgemeiner erweisen, es ist nämlich nicht nöthig, daß die Dreyecke rechtwinklich seyen, wenn nur die den gleichen Grundlinien gegenüberliegende Winkel überhaupt gleich sind.

3) Selbst dann gilt der Lehrsatz, wenn auch die Gleichheit der Winkel in der Spitze unbekannt ist, wenn sie nur im Halbkreise liegen. Vielleicht liesse sich daraus umgekehrt, die Gleichheit der Winkel im Halbkreise beweisen, woraus sich denn die Grösse der Winkel im Dreyecke leicht herleiten liesse.

4) Wie

4) Wie das Dreyeck ABC grösser ist, als das Dreyeck DEF, so ist wiederum das Dreyeck DEF grösser, als ein solches, in welchem die Differenz der Catheten und der Winkel an der Hypothense noch grösser ist.

III. LEHRSATZ.

Wenn in zwey Dreyecken die Grundlinie und der ihr gegenüberliegende Winkel und ausserdem in beyden noch eine Seite gleich ist, so decken sich die Dreyecke.

Es sey (Fig. 54, 52.) in den Dreyecken ABC, DEF, $AC = DF$, $\angle ABC = \angle DEF$ und $BC = EF$, so behaupte ich, dass sich die beyden Dreyecke decken.

Beweis.

Man setze an den Punkt C, der Linie AC einen Winkel ACG an, welcher dem Winkel DFE gleich sey (§. 20.) und mache $CG = FE$ (§. 3.), so ist, da auch $AC = DF$ (p. hypoth.) $\triangle ACG \cong \triangle DEF$ (§. 4.) und $AG = DE$, $\angle ACG = \angle DEF$.

Man ziehe BG.

$CG = FE$ (p. constr.) $= CB$ (p. hyp.) also $\angle CBG = \angle CGB$ (§. 5.)

$\angle ACG = \angle DEF$ (p. demonstr.) $= \angle ABC$ (p. hyp.), mithin

$$\left[\begin{array}{c} \angle ACG - \angle CGB \\ \angle AGB \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \angle ABC - \angle CBG \\ \angle ABG \end{array} \right] \text{ folglich}$$

$AB = \left\{ \begin{array}{l} AG \\ DE \end{array} \right\}$ (§. 6.)

Da also in den Dreyecken ABC, DEF, die Seiten stückweise gleich sind, so decken sie sich (§. 7.).

Anmer-

Anmerkung.

Damit ist also, um es mit andern Worten zu sagen, bewiesen, daß Dreyecke gleich sind, wenn zwey Seiten und ein correspondirender Winkel gleich sind. *Euclides*, der dieses Satzes nicht in der Allgemeinheit bedurfte, hat ihn nur von dem Falle bewiesen, wenn der gleiche Winkel von den gleichen Seiten eingeschlossen wird.

IV. LEHRSATZ.

Wenn in einer vierseitigen Figur zwey gegenüberliegende Seiten und zwey gegenüberliegende Winkel gleich sind; so sind es auch die beyden übrigen gegenüberliegenden Seiten und Winkel.

Es sey (Fig. 55.) $AC = BD$ und $CAB = CDB$, so behaupte ich, daß auch $AB = CD$ und $ABD = ACD$.

Beweis.

1) Man ziehe die Diagonale BC .

Da $BC = BC$, $CAB = CDB$, $AC = BD$ (p. hypoth.) so ist $\triangle ACB \cong \triangle CBD$ (III.) und $AB = CD$.

2) Man ziehe die Diagonale AD .

Da $AD = AD$, $AB = CD$ (1), $BD = AC$ (p. hypoth.) so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§. 7.) und $ABD = ACD$.

Anmerkungen.

1) Um diesen Abschnitt von der letzten Hälfte des vorigen ganz unabhängig zu erhalten, habe ich diesen und den vorigen Lehrsatz hieher gestellt, ob sie gleich in einander geschlungen (im 3ten Beweise §. 30.) bereits vorgekommen sind.

2) Fast denselben Satz, aber anders bewiesen, siehe §. 21. Zuf.

V. LEHRSATZ.

In jedem rechtwinklichen gleichschenkligen Dreyecke sind die drey Winkel zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 56.) in dem Dreyecke ABC , $AB = AC$ und $BAC = R$; so behaupte ich, daß $BAC + ABC + ACB = 2 R$.

Beweis.

Da $BAC = R$ (p. hypoth.), so wäre eigentlich nur zu beweisen, daß $ABC + ACB = R$, oder noch bestimmter, daß $ACB = \frac{1}{2} R$, denn $ABC = ACB$ (§. 5.)

Man setze nun auf C der Linie AC einen rechten Winkel ACD (§. 10.) und lasse von B auf die Linie CD ein Loth fallen (§. 11.); so kann dasselbe nicht unterhalb der Linie BC gegen E zu liegen, wie BE , weil sonst $BCD > R$ (§. 15.) was unmöglich ist, da $ACD = R$ (p. constr.) sonach fällt es gegen D zu und bildet die Linie BD .

Wären nun die drey Winkel in dem Dreyecke ABC nicht zwey rechten und also ACB nicht einem halben rechten gleich; so nehme man

Erstlich an, daß $ACB < \frac{1}{2} R$.

a) $ACD = R$ (p. constr.) $ACB < \frac{1}{2} R$ (p. hypoth.) also $BCD > \frac{1}{2} R$ und $DBC < ABC$, denn macht man $BCF = BCD$ (§. 20.) und $CF = CD$, so ist $\triangle BFC \cong \triangle BCD$ (§. 4.) und $FBC = DBC$, $BFC = BDC = R$, wollte man aber annehmen, daß $CD = CG$ oder $= CH$, so wäre ja, da $BAC = R > BGC > BHC$ (§. 15.) in beyden Fällen BDC kleiner als ein rechter Winkel, welches der Construction widerspricht. Es ist also $DBC < ABC < BCD$, und $DC < BD$

(§. 17.) mithin $\left. \begin{array}{l} DC < \\ BD > \end{array} \right\} AC$ (I.).

b) Man

b) Man verlängere nun DC und mache $DG = AC$ und schneide von der DB ein Stück $DI = AC$ ab (§. 3.) und ziehe IE , so ist $\triangle IDE \cong \triangle ABC$ (§. 4.) und $IE = BC$, $DIE = DEI = ACB$.

c) Das Dreyeck IDE ist dem Inhalte nach gröfser, als das Dreyeck BDC (II.) und also

$$\left(\begin{array}{c} IDE - IKCD \\ \triangle KEC \end{array} \right) > \left(\begin{array}{c} \triangle BDC - IKCD \\ \triangle KBI \end{array} \right)$$

d) Ich behaupte nun, daß $KI < KC$.

Gesetzt $KI = KC$, so ist da

$$\left(\begin{array}{c} KI + KE \\ IE \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} KB + KC \\ BC \end{array} \right) \quad (b)$$

$KE = KB$ und da auch $IKB = CKE$ (§. 14.) so wäre $\triangle KBI = \triangle KEC$ (§. 4.), da doch $\triangle KEC > \triangle KBI$ (c).

Gesetzt $KI > KC$, so ist da

$$\left\{ \begin{array}{c} KI + KE \\ IE \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} KC + KB \\ BC \end{array} \right\} \quad (b)$$

$$KE < KB$$

Man könnte also von der KI und KB , die Stücke KM , KL abschneiden, welche den KC , KE gleich wären und so entstünde in dem Dreyeck KBI ein kleineres Dreyeck KLM , welches dem Dreyeck KEC gleich wäre, da doch das grössere Dreyeck BKI kleiner ist, als das Dreyeck KEC (c).

e) Es ist also $KI < KC$

$$\text{aber } KI + KE = KC + KB \quad (b)$$

mithin $KE > KB$, weil sonst

$$KI + KE < KC + KB.$$

Man verlängere nun KI , KB und mache $KN = KC$, $KO = KE$ und ziehe NO , so ist, da $NKO = CKE$ (§. 14.) $\triangle OKN \cong \triangle KEC$ (§. 4.) und $ONK = KCE$, $NOK = KEC$.

f) IE

$$f) \quad IE = BC \text{ (b)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} KI + \left\{ \begin{array}{l} KE \\ KO \text{ (e)} \\ KB + BO \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} KB + \left\{ \begin{array}{l} KC \\ KN \text{ (e)} \\ KI + IN \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

also $KI + KB + BO = KB + KI + IN$, man subtrahire
nun $KI + KB = KB + KI$

so bleibt $BO = IN$.

g) $NOK = KEC \text{ (e)} = DIE \text{ (b)} = BIN \text{ (§. 14.)}$
folglich sind in der vierseitigen Figur $OBIN$ zwey
gegenüber liegende Winkel, NOK , BIN und zwey
gegenüber liegende Seiten, BO , IN (f) gleich, dem-
nach auch $ONI = OBI \text{ (IV.)}$.

h) $IBC + OBI = 2R \text{ (§. 12.)}$, $IBC < ABC \text{ (a)} < \frac{1}{2}R$
(p. hypoth.) also $OBI > \frac{1}{2}R$.

i) $BCD + BCE = 2R \text{ (§. 12.)}$, $BCD > \frac{1}{2}R \text{ (a)}$
und $BCE < \frac{1}{2}R$, aber $BCE = ONK \text{ (e)} = OBI \text{ (g)}$
und $OBI < \frac{1}{2}R$, welches dem eben (h) bewiesenen
widerspricht. Es ist also auch widersprechend, dass
 $ACB < \frac{1}{2}R$.

Zweytens. Man nehme an, $ACB > \frac{1}{2}R$.
(Fig. 57.)

k) $ACD = R \text{ (p. constr.)}$, $ACB > \frac{1}{2}R \text{ (p. hyp.)}$
also $BCD < \frac{1}{2}R$ und $DBC > ABC$, denn macht
man $PCB = BCD \text{ (§. 20.)}$, so siele, wenn man ge-
gen A ein dem $\triangle BCD$ gleiches Dreyeck errichte,
 BD in BP , oder BQ , wenn anzunehmen wäre, dass
der Winkel ABC gleich, oder gröfser, als DBC sey.
Nun ist das aber darum nicht möglich, weil
 $BQC > BPQ \text{ (§. 15.)}$ und $BPQ > BAC$, beyde also
gröfser, als ein rechter Winkel seyn würden und
dem BDC nicht gleich kommen könnte. Es ist also
 $DBC > ABC > \frac{1}{2}R > BCD$ und $DC > BD \text{ (§. 17.)}$

mithin $\left. \begin{array}{l} DC > \\ BD < \end{array} \right\} AC \text{ (I.)}$

l) Man

l) Man verlängere nun DB bis $DR = AC$ und schneide von der DC ein Stück $DS = AC$ ab und ziehe PS, so ist $\triangle DRS \cong \triangle ABC$ (§. 4.) und $RS = BC$, $DRS = DSR = ABC = ACB$.

m) Das Dreyeck DRS ist dem Inhalte nach gröfser, als das Dreyeck DBC (II.), weil in diesen beyden rechtwinklichen Dreyecken die Hypothenuse gleich ist (I), aber nur das erstere gleichschenkelich ist.

$$\text{Folglich } \left[\begin{array}{c} \triangle DRS - DBTS \\ \triangle RTB \end{array} \right] > \left[\begin{array}{c} \triangle DBC - DBTS \\ \triangle CTS \end{array} \right]$$

n) Ich behaupte nun, dafs $TS < TB$.

Gesetzt $TS = TB$, so wäre

$$\text{da } \left\{ \begin{array}{c} TS + TR \\ RS \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} TB + TC \\ BC \end{array} \right\} \quad (1)$$

auch $TR = TC$

und weil auch $RTB = CTS$ (§. 14.), $\triangle RTB = \triangle CTS$, was doch der Fall nicht ist. (m) Noch viel weniger kann TS gröfser seyn, als TB, weil sich dann, gerade, wie vorhin (d) geschehen ist, zeigen liesse, dafs $\triangle RTB < \triangle CTS$, wovon das Gegentheil erwiesen ist (m).

o) Also $TS < TB$

$$TS + TR = TB + TC \quad (1)$$

folglich $TR > TC$, denn TR mufs gerade um so viel gröfser seyn, wie TC, als TS kleiner ist, wie TB.

Man verlängere nun TS, TC bis $TU = TB$ und $TV = TR$ und ziehe UV, so ist, da auch $UTV = RTB$ (§. 14.), $\triangle UTV \cong \triangle RTB$ (§. 4.) und $TUV = RBT$, $TVU = TRB$.

p) $RS = BC$ (1)

$TR + TS = TB + TC,$

$TR = TV$ (p. conftr.) $= TC + CV$

also $TC + CV + TS = TB + TC,$ man subtrahire auf
 $\quad - TC \quad \quad \quad = \quad - TC$ (beyden Seiten)

so bleibt $CV + TS = TB$

aber $TB = TU$ (p. conftr.) $= TS + SU,$

mithin $CV + TS = TS + SU,$ man subtrahire auf
 beyden Seiten $- TS = - TS$

so bleibt $CV = SU.$

q) Da nun $TVU = TRB$ (o)

$TRB = RSD$ (1)

$RSD = CSU$ (§. 14.)

so ist $TVU = CSU$

$CV = SU$ (p)

mithin $TUV = SCV$ (IV.)

r) $TUV = RBT$ (o)

$TUV = SCV$ (q)

also $RBT = SCV$

$DBC > BCD$ (k)

mithin $RBT + DBC > SCV + BCD$

aber $RBT + DBC = 2 R$ (§. 12.)

also $2 R > SCV + BCD$

ferner $SCV + BCD = 2 R$ (§. 12.)

folglich $2 R > 2 R,$ was absurd ist. Es ist also auch absurd anzunehmen, daß $ACB > \frac{1}{2} R$ und da ACB auch nicht kleiner seyn kann (a — i), so ist $ACB = \frac{1}{2} R$ und $BAC + ACB + ABC = 2 R.$

Anmerkung.

Man kann nun §§. 30 etc. folgen und den Pythagorischen Lehrsatz an seinem gewöhnlichen Platze lassen.

VI. AUFGABE.

Um eine gegebene Linie ein Quadrat zu beschreiben.

Es sey (Fig. 58.) die Linie **BC** gegeben, man soll um sie ein Quadrat beschreiben.

Auflösung.

Man halbire die Linie **BC** (§. 9.), errichte auf **E** die Linie **ED** unter einem rechten Winkel (§. 10.), verlängere sie gegen **A**, mache **ED** und **EA** der **EB** gleich (§. 3.) und ziehe **BD**, **DC**, **CA**, **AB**.

Beweis.

Da $EB = ED$ (p. constr.) so ist $EDB = EBD$ (§. 5.) und da $DEB = R$ (p. constr.) so ist $EDB = \frac{1}{2}R$ (V.).

Aus eben diesem Grunde ist $EBA = EAB = EAC = ECA = ECD = EDC = \frac{1}{2}R$ und

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} EBD + EBA \\ ABD \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} EAB + EAC \\ BAC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ECA + ECD \\ ACD \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} EDC + EDB \\ CDB \end{array} \right\} = R \end{aligned}$$

Ferner da $EBD = \frac{1}{2}R = ECD$, so ist $CD = BD$ (§. 6.) und aus gleichem Grunde $BD = AB = AC = CD$.

Es ist also um **BC** eine vierseitige Figur beschrieben worden, in welcher die Seiten gleich und die Winkel rechte Winkel sind.

VII. AUFGABE.

Auf eine gegebene Linie ein Quadrat zu errichten.

Es sey (Fig. 58.) die Linie **AB** gegeben, man soll auf derselben ein Quadrat errichten.

Auflösung.

Man errichte auf dem Punkte **A** der Linie **AB** das Loth **AC** (§. 10.) und mache $AC = AB$ und ziehe **BC**. Hierauf setze man auf **BC** den Winkel $BCD = ABC$ (§. 20.) mache $CD = AB$ (§. 3.) und ziehe **BD**.

Beweis.

Beweis.

Da, nach der Construction, $CAB = R$ und $AC = AB$, so ist $ABC = ACB$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (V.)

Ferner $BC = BC$

$$\left. \begin{array}{l} CD = BA \\ BCD = ABC \end{array} \right\} \text{ (p. constr.)}$$

also $\triangle DCB \cong \triangle ABC$ (§. 4.)

und $CDB = CAB = R$, $DB = AC = AB = CD$,
 $CBD = ACB = ABC = BCD = \frac{1}{2} R$

mithin $\left\{ \begin{array}{l} ACD \\ ACB + BCD \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ABD \\ ABC + CBD \end{array} \right\} = R$.

Es ist also auf die Linie AB eine vierseitige Figur errichtet worden, in welcher die Seiten gleich und die Winkel rechte Winkel sind.

VIII. LEHRSATZ.

Wird auf einer Seite des Quadrats ein Loth innerhalb demselben errichtet; so trifft es, hinlänglich verlängert, die gegenüberliegende Seite; bildet mit derselben rechte Winkel; theilt sie in eben so grosse Stücke, als die Linie, auf der es steht, durch dasselbe getheilt wird; und ist selbst den Seiten des Quadrats gleich.

Es sey (Fig. 59.) $ABCD$ ein Quadrat und auf der Seite AB das Loth EF errichtet worden, so behaupte ich, dass es:

- 1) verlängert die CD treffe;
- 2) dass $CFE = DFE = R$
- 3) dass $CF = AE$, $FD = EB$
- 4) dass $EF = AB$.

Beweis.

1) Wenn GE verlängert die CD nicht treffe, so müsste sie die AC , oder BD schneiden. Wäre nun z. B. EGH eine gerade Linie; so wäre

$$\left\{ \begin{array}{l} HEB \\ R(p. hyp.) \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} CAB \\ R(p. hyp.) \end{array} \right\} \text{ (§. 15.) was absurd ist.}$$

2) a) Man ziehe die Diagonale CB , schneide von BD ein Stück $BI = BE$ ab (§. 3.) und ziehe GI , so behaupte ich; daß $GI = IB$, denn

$CD = BD$ und $CDB = R$ (p. hyp.),
so ist $DCB = DBC$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (V.) $= CBA$
ferner, da $BI = BE$ (p. constr.) und $BG = BE$,
 $\triangle IBG = \triangle BEG$ (§. 4.) und $IG = EG$, $IGB = EGB$,
 $GIB = GEB = R$ (p. hyp.).

Wäre nun $IG > IB$, so sey $IK = IB$, so wäre $IKB = IBK = \frac{1}{2} R$ (V.), da doch $IBK < \begin{Bmatrix} IBG \\ \frac{1}{2} R \end{Bmatrix}$.

Eben so wenig kann GI kleiner, als IB seyn, weil sonst folgen würde, daß $GBI < \frac{1}{2} R$. Also $GI = IB = BE = EG$ und $IGB = IBG$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$, und $IGE = R$.

b) Man verlängere IG , so trifft sie, da $GIB = R$ (a) die AC (1).

c) $IGB = EGB = \frac{1}{2} R$ (a) $= CGF$ (§. 14.) $= CGL = GCF = GCL$, also $CF = FG$, $CL = LG$ (§. 6.) Nun ist aber auch $CF = CL$, denn gesetzt es sey nicht so und z. B. $CF > CL$, so mache man $CM = CL$ (§. 3.) und ziehe GL , so ist,

da $CM = CL$ (p. constr.)

$CG = CG$

$LCG = MCG = \frac{1}{2} R$ (a)

also $\triangle MCG \cong \triangle LCG$

und $MGC = CGL$,

aber es ist eben bewiesen worden, daß $CGL = CGF$ und $CGF > MCG$ was sich widerspricht.

d) Da nun also $CF = CL = LG = FG$ (c), so ist, wenn man FL zieht, $GFL = GLF$ (§. 5.) $= \frac{1}{2} R$ (V.), aus demselben Grunde ist auch $CFL = \frac{1}{2} R$ und $CFG = R = DFG$, welches das zweyte war.

3) Ich behaupte weiter, daß $FD = GI$. Denn gesetzt

$FD < GI$ und $MD = GI$

so ziehe man MI , GD und es ist, da $MDI = R$ (p. hyp.)

hyp.) $\equiv$ GID (p. dem. a.) Δ MDI $\cong$ Δ GID (§. 4.),
 DMI $\equiv$ DGI, DIM $\equiv$ IDG. MI $\equiv$ GD. Ist also
 DIM $\equiv$ IDG, so ist auch ND $\equiv$ NI (§. 6.) und NG $\equiv$ NM,
 weil $\left\{ \begin{array}{c} \text{ND} + \text{NG} \\ \text{GD} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{NI} + \text{NM} \\ \text{MI} \end{array} \right\}$ und
 mithin NMG $\equiv$ NGM (§. 5.)
 aber DMI $\equiv$ DGI

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{c} \text{NMG} + \text{DMI} \\ \text{DMG} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{NGM} + \text{DGI} \\ \text{MGI} \end{array} \right\}$$

Nun ist IGE $\equiv$ R (a) $\equiv$ IGF und folglich MGI $>$ R
 und auch DMG $>$ R. Aber DFG $>$ DMG (§. 15.) $>$ R,
 was dem oben (2. d.) bewiesenen widerspricht.

Wollte man annehmen, dass FD $>$ GI, so wäre,
 wenn man von FD ein, der GI gleiches Stück ab-
 schnitte und auf gleiche Art die Demonstration fort-
 setzte, das Resultat, dass DFG $<$ R, welches eben
 so wenig der Fall ist.

Ist aber FD $\equiv$ GI, so ist auch, da GI $\equiv$ IB $\equiv$ BE
 (2. a) auch FD $\equiv$ EB und $\left\{ \begin{array}{c} \text{CD} - \text{FD} \\ \text{CF} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{AB} - \text{EB} \\ \text{AE} \end{array} \right\}$
 welches das dritte war.

4) FG $\equiv$ CF (2. c und d) und EG $\equiv$ EB (2. a)
 $\equiv$ FD (3) folglich $\left\{ \begin{array}{c} \text{FG} + \text{EG} \\ \text{EF} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{CF} + \text{FD} \\ \text{CD} \end{array} \right\} = \text{AB}$
 (p. hyp.) welches das vierte war.

IX. LEHRSATZ.

*In jedem Dreyecke sind die drey Winkel zusammen genommen
 zwey rechten Winkeln gleich.*

Es sey (Fig. 60.) das Dreyeck ABC gegeben. Ich
 behaupte, dass $\text{ACB} + \text{ABC} + \text{BAC} \equiv 2 \text{ R.}$

Beweis.

1) Es sey AB die größte Seite des Dreyecks
 ABC, auf dieser errichte man das Quadrat ABDE (VII.).

H

Da

Da nun $\angle CBF > \angle ACB$ (§. 15.) $> \angle ABC$ (§. 16.), so ist
 $\angle CBF > \left\{ \begin{array}{l} R \text{ (§. 12.)} \\ \angle ABC < \end{array} \right\}$ Eben so wird gezeigt, daß
 $\angle CAB < R$, folglich fallen die Seiten BC , AC des
 gegebenen Dreyecks, zwischen die Seiten AB , BD
 und AB , AE , des construirten Quadrats.

Auch die Spitze C des Dreyecks fällt in das Qua-
 drat, denn berührte sie die gegenüberliegende Seite,
 wie AHB , so wäre, da $\angle AHD > \left\{ \begin{array}{l} \angle AED \\ R \text{ (p. constr.)} \end{array} \right\}$
 (§. 15.), $\angle AHE < R$ (§. 12.) und folglich $\angle AHE < \angle AED$,
 und $\left. \begin{array}{l} AE \\ AB \end{array} \right\} < AH$, da doch nach der Voraussetzung,
 AB die größte Seite des Dreyecks ist. Noch viel
 weniger kann die Spitze über die gegenüberliegende
 Linie hinausgehn.

2) Man fälle von C ein Loth auf die AB (§. 11.),
 so fällt dasselbe zwischen A und B , denn fiel es außer
 das Quadrat, wie CF , so wäre $\angle ABC > \left\{ \begin{array}{l} \angle CFA \\ R \end{array} \right\}$, da
 doch $\angle ABC < R$ (1).

Nun verlängere man die lothrechte Linie GC
 gegen ED , so ist $\angle GHE = R$ und $HE = GA$ (VIII.).

3) Man lasse von C auf die AE das Loth CI fal-
 len (§. 11.), so ist $CI = HE$. Denn man nehme
 einmal an CI sey größer, als HE ,

a) so mache man $IK = EH$ (§. 3.) und ziehe
 HK , GK , so ist

$$\left. \begin{array}{l} \angle IKH > \angle ICH \\ \angle IKG > \angle ICG \end{array} \right\} \text{ (§. 15.)}$$

$$\text{also } \angle IKH + \angle IKG > \left\{ \begin{array}{l} \angle ICH + \angle ICG \\ 2R \text{ (§. 12.)} \end{array} \right\}$$

b) Man

b) Man ziehe HI, KE, so ist, da

$$\begin{array}{l} EI = EI \\ HE = KI \\ HEI = KIE = R \end{array} \} \text{ (p. constr.)}$$

$\triangle HEI \cong \triangle KIE$ (§. 4.), $HI = KE$, $EHI = EKI$,
 $HIE = KEI$, mithin $LE = LI$ (§. 6.) und
 $\left\{ \begin{array}{l} KE - LE \\ KL \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} HI - LI \\ HL \end{array} \right\}$ und $LHK = LKH$ (§. 5.)

c) Da (nach b) $EHI = EKI$
 $LHK = LKH$

$$\text{so ist } \left\{ \begin{array}{l} EHI + LHK \\ EHK \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} EKI + LKH \\ IKH. \end{array} \right\}$$

d) Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daß
 $AGK = IKG$.

e) $EHK = R$ (2) also $EHK < R$

$AGC = R$ (p. constr.) $AGK < R$

$$\text{also } EHK + AGK < 2R$$

aber $EHK = IKH$ (c) und $AGK = IKG$ (d)
 mithin $IKH + IKG < 2R$, welches dem oben be-
 wiesenen (a) widerspricht.

Auf den gleichen Widerspruch führte die An-
 nahme, daß CI kleiner sey, als HE, welches aus-
 zuführen eine bloße Wiederholung des eben gesche-
 henen seyn würde, da man die IC nur so viel zu
 verlängern hat, bis sie der HE gleich käme, worauf
 man eben die Winkel kleiner, als zwey rechte finden
 würde, die nachher, als gröfser hervorträten.

4) In den beyden Dreyecken ACI und AGC ist
 demnach $AC = AC$

$$AIC = AGC = R \text{ (p. constr.)}$$

$$CI = HE \text{ (3)} = GA \text{ (2)}$$

$$\text{also } \triangle ACI \cong \triangle AGC \text{ (III.)}$$

und $AI = GC$, $IAC = ACG$ und folglich

$$ACG + BAC = IAC + BAC = BAE = R \text{ (p. constr.)}$$

H 2

5) Man

5) Man verlängere die IC bis sie die BD trifft, so ist $CMB = R$ und $MB = IA$ (VIII.) $= CG$ (4). Es ist aber auch, nach der Construction $CGB = R$ und folglich, da

$$\begin{array}{l} CB = CB \\ CMB = CGB = R \\ MB = CG \end{array}$$

$$\triangle CMB \cong \triangle CGB \text{ (III.)}$$

und $MBC = GCB$ mithin

$$GCB + ABC = MBC + ABC = ABD = R \text{ (p. constr.)}$$

$$6) ACG + BAC = R \text{ (4)}$$

$$GCB + ABC = R \text{ (5)}$$

$$\text{also } \left[\begin{array}{l} ACG + GCB \\ ACB \end{array} \right] + BAC + ABC = 2R.$$

Anmerkung.

Ist das Quadrat einmal construirt, so kann dieser Beweis auf vielfältige Art geführt werden. Der eben geführte kann sehr erleichtert werden, wenn man einzelne Theile des Verfahrens als besondere Lehrsätze vorausschickte.

Zusatz.

In jeder vierseitigen Figur ABDC (Fig. 55.) sind die vier Winkel zusammen genommen vier rechten Winkeln gleich, denn zieht man die Diagonale AD, so entstehen die beyden Dreyecke ADC, ADB, deren sechs Winkel, welche nach dem obigen Lehrsatz, vier rechten Winkeln gleich kommen, die vier Winkel der vierseitigen Figur ausmachen.

X. ERKLÄRUNG.

Die Höhe eines Dreyecks nennt man die aus der Spitze auf die Grundlinie gefällte senkrechte Linie.

Anmerkungen.

1) Sind die Winkel an der Grundlinie spitze Winkel, wie in ACB (Fig. 60.), so fällt die Linie CG, welche

welche die Höhe bezeichnet, in das Dreyeck; auſſer daſſelbe aber, wenn ein Winkel an der Grundlinie ein ſtumpfer Winkel iſt, wie im Dreyecke CBF, deſſen Höhe CG die *verlängerte* Grundlinie FB trifft. Iſt hingegen ein Winkel an der Grundlinie ein rechter, wie im Dreyeck CGB, ſo ſtellt die ſenkrechte Cathete die Höhe vor.

2) Da es gleichgültig iſt, welche Linie im Dreyeck man als die Grundlinie betrachten will, indem es erlaubt iſt, ihm jede beliebige Lage zu geben; ſo iſt auch die Höhe deſſelben relativ und ganz von dieſer Annahme abhängig.

3) Der Begriff der Höhe wird daher hier aufgenommen, um den Ausdruck des Parallelen deſto leichter vermeiden zu können, ſo wie umgekehrt *Euclides* des Begriffs der Höhe entbehren konnte.

XI. LEHRSATZ.

Rechtwinkliche Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe decken ſich.

Es ſey (Fig. 58.) in den rechtwinklichen Dreyecken CAB, DBA die Grundlinie und die Höhe gleich, ſo behaupte ich, daſs beyde Dreyecke gleich und ähnlich ſind.

Beweis.

Da die Grundlinie die horizontale und die Höhe die ſenkrechte Cathete iſt (X. 1) ſo ſind in beyden Dreyecken zwey Seiten und der eingekloſſene Winkel gleich; ſie decken ſich alſo (§. 4.).

Anmerkung.

Hier, und wenn in der Folge von der Höhe rechtwinkliger Dreyecke geſprochen wird, ſetzen wir immer voraus, daſs die eine Cathete für die Grundlinie, die andere aber für die Höhe genommen

werde. Wollte man aber die Hypothenuſe BC , AD für die Grundlinie nehmen, ſo lieſs ſich der Lehrsatz auch in dieſem Falle nicht nur leicht darthun, ſondern iſt auch wirklich im Folgenden bewieſen.

XII. LEHRSATZ.

Ein jedes Dreyeck, in welchem ein Winkel an der Grundlinie ein ſtumpfer Winkel iſt, iſt dem Inhalte nach, einem rechtwinklichen Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe gleich.

Es ſey (Fig. 61.) ein Dreyeck BAC gegeben, in welchem der Winkel $BAC > R$ und deſſen Höhe CG , welche auf die verlängerte Grundlinie BA fällt (X. 1), der Höhe FE eines gegebenen rechtwinklichen Dreyecks EDF (Fig. 62.) gleich iſt, auch ſey $BA = ED$; ſo iſt das Dreyeck BAC dem Inhalte nach dem Dreyecke EDF gleich.

Beweis.

1) Man ſetze auf B der Linie BA den rechten Winkel ABH (§. 10.) und mache $BH = EF$, ſo iſt, wenn man HA gezogen hat, da auch $BA = ED$ (p. hypoth.) $\triangle BHA \cong \triangle EFD$ (XI.).

2) Man verlängere AB und mache $BI = AG$ (§. 3.) und ziehe HI , ſo iſt $\triangle BHI \cong \triangle GCA$ (XI.), $HI = CA$, $HIA = CAG$.

$$3) \quad HIA + IHA + IAH = 2 R \text{ (IX.)}$$

$$CAG + CAH + IAH = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} HIA \\ CAG (2) \end{array} \right\} + IHA + IAH = CAG + CAH + IAH$$

$$\text{mithin } IHA = CAH.$$

4) Man ziehe HC , ſo iſt, da

$$HA = HA$$

$$HI = AC (2)$$

$$IHA = CAH (3)$$

$$\triangle IHA \cong \triangle CAH \text{ (§. 4.)}$$

$$\text{und } IA = HC.$$

5) $\Delta IHA = \Delta BHI + \Delta BHA = \Delta GCA (2) + \Delta BHA$
 aber $\Delta IHA = \Delta CAH (4)$, mithin auch
 $\Delta CAH = \Delta GCA + \Delta BHA$.

Es ist also das Dreyeck CAH, dem Inhalte nach, die Hälfte der vierseitigen Figur BGCH.

6) $BC = BC$
 $BH = EF (1) = CG$ (p. hypoth.)
 $HC = IA (4) = IB + BA = AG (2) + BA = BG$
 also $\Delta HBC = \Delta CBG (\S. 7.) = \frac{1}{2} BGCH$.

7) $\Delta CAH = \frac{1}{2} BGCH (5)$
 $\Delta HBC = \frac{1}{2} BGCH (6)$

also $\Delta CAH = \Delta HBC$.

$\left\{ \begin{array}{c} \Delta CAH - \Delta CKH \\ \Delta CAK \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta HBC - \Delta CKH \\ \Delta HBK \end{array} \right\}$
 und $\left\{ \begin{array}{c} \Delta CAK + \Delta BKA \\ \Delta BAC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta HBK + \Delta BKA \\ \Delta BHA \\ \Delta EFD (1) \end{array} \right\}$

XIII. LEHRSATZ.

Ein jedes Dreyeck, in welchem die beyden Winkel an der Grundlinie spitze Winkel sind, ist dem Inhalte nach einem rechtwinklichen Dreyecke, von gleicher Grundlinie und Höhe, gleich.

Es sey (Fig. 63.) in dem gegebenen Dreyecke ACB, $\angle ABC < R$ auch $\angle BAC < R$ und die Höhe $CG = FE$ (Fig. 62.), auch $AB = ED$, so ist $\Delta ACB = \Delta EFD$.

Beweis.

1) Man verlängere GB und mache $BH = AG$ (§. 3.) so ist $GH = AB$ und $\Delta GCH = \Delta EFD$ (XI.).

2) $\angle CBH > \angle CGB$ (§. 15.), also ist ΔCBH stumpfwinklich und seine Höhe CG, aber $BH = AG$ (1), also $\Delta CBH = \Delta GCA$ (XII.) und

$\left\{ \begin{array}{c} \Delta CBH + \Delta GCB \\ \Delta GCH \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta GCA + \Delta GCB \\ \Delta ACB. \end{array} \right\}$

3)

3) $\triangle GCH = \triangle ACB$ (2), $\triangle GCH = \triangle EFD$ (1),
also $\triangle ACB = \triangle EFD$.

XIV. LEHRSATZ.

Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe, sind sich dem Inhalte nach gleich.

Beweis.

Wie auch die Dreyecke beschaffen seyn mögen, so sind sie immer einem rechtwinklichen Dreyecke, das durch ihre Grundlinie und Höhe gebildet wird, gleich (XI. XII. XIII.), da nun solche Dreyecke sich decken (XI.), so sind sie in jedem Falle einem gemeinschaftlichen Dritten, also auch unter sich selbst gleich.

u. s. w.

Anmerkung.

Auf ähnliche Weise können alle andere Sätze der Geometrie bewiesen werden, ohne dafs es nöthig wäre, von Parallellinien zu sprechen.

Dritter Abschnitt.

Von dem nothwendigen Zusammentreffen zweyer geraden Linien, an der Seite, wo sie mit einer dritten, sie schneidenden Linie solche Winkel bilden, dass die beyden innern Winkel kleiner, als zwey rechte Winkel sind.

Dr. J. A. B. B. B.

For your most kind and
generous donation, we are
most sincerely grateful, and
hope it will be of great
benefit to the cause.

§. 41.

LEHRSATZ.

Ein, auf dem Endpunkte des Durchmessers eines Kreises, aufgerichtetes Loth fällt ausser den Kreis und zwischen dasselbe und die Peripherie fällt keine andere gerade Linie.

Es sey (Fig. 41.) auf dem Endpunkte B des Durchmessers AB, eine Linie BE unter einem rechten Winkel errichtet; so liegt die Linie BE ausser dem Kreise ABC, auch fällt zwischen die BE und die Peripherie CA keine andere gerade Linie.

Beweis.

1) Man ziehe aus dem Mittelpunkte D auf einen, nach Belieben in der Linie BE angenommenen Punkt F, die Linie DF, so ist, da $DBF = R$ (p. hyp.), $BDF + DFB = R$ (§. 30.), also $DFB < \begin{cases} R \\ DBF \end{cases}$ und daher $DF > DB$ (§. 17.), also DF grösser, als der Halbmesser. Es liegt sonach der Punkt F ausser dem Kreise und dieß gilt von jedem andern Punkte der Linie BE, ausser von B.

2) Fiele nun zwischen EB und die Peripherie eine andere gerade Linie BG, so lasse man auf BG von D, das Loth DH fallen (§. 11.), so ist, da $HBD < R$ und $DHB = R$, $DH < DB$ (§. 17). DH wäre also kleiner, als der Durchmesser und H fiel zwischen den Mittelpunkt und die Peripherie, was der Annahme widerspricht und dieselbe also widerlegt.

Zusatz.

Hieraus ergibt sich auch, dass eine jede gerade Linie, welche zwey Punkte der Peripherie, B, M, verbindet

bindet in den Kreis fallen müsse. Denn da $DB = DM$, als Halbmesser, so ist $DBM = DMB$ (§. 5.) und da $DMB + DBM + MDB = 2R$ (§. 31.), so ist $DBM + DMB < 2R$ und $DBM < R$.

Da nun zwischen das Loth BI und die Peripherie keine andere gerade Linie fallen kann, so liegt die zwischen BI , BD befindliche gerade Linie BM in dem Kreise selbst.

§. 42.

LEHRSATZ.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und es wird von dem Mittelpunkte aus, an den Berührungspunkt eine gerade Linie gezogen; so steht diese auf der Tangente lothrecht.

Es berühre (Fig. 41.) die EBI den Kreis ABC in B ; so steht die, durch den Mittelpunkt D an den Berührungspunkt B gezogene Linie AB auf der EI lothrecht.

Beweis.

Man nehme das Gegentheil an, daß nämlich $EBD < R$ und mache $KBD = R$ (§. 10.); so fällt zwischen KB und die Peripherie CB eine gerade Linie EB , was unmöglich ist (§. 41.) Nimmt man aber an, daß $EBD > R$, so wäre $IBD < R$ (§. 12.), so fiel die IB zwischen die Peripherie BM und die an DB unter einem rechten Winkel zu setzende DBN , was eben so wenig möglich ist.

§. 43.

LEHRSATZ.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt und man errichtet eine gerade Linie in dem Berührungspunkte auf der Tangente lothrecht; so ist in dieser des Kreises Mittelpunkt.

Es sey (Fig. 41.) auf der Tangente EI die AB in dem Berührungspunkte B lothrecht aufgestellt; so liegt der Mittelpunkt des Kreises ABC in der Linie AB .

Beweis.

Beweis.

Der Mittelpunkt des Kreises ABC sey auſſer der Linie AB, etwa L, ſo ziehe man LB. Alsdenn iſt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{LBE} \\ \text{LBD} + \text{EBA} \end{array} \right\} = R \text{ (§. 42.). Aber } \text{EBA} = R \text{ (p. hyp.)}$$

Es iſt alſo dieſe Annahme unſtatthaft, da ſie recht verſtanden einen Widerſpruch enthält.

§. 44.

LEHRSATZ.

Im Kreiſe iſt der Centriwinkel doppelt ſo groſs, als der Peripheriewinkel, wenn beyde auf einerley Bogen ſtehn.

Es ſey (Fig. 42.) an dem Mittelpunkte E des Kreiſes ABC, der Winkel BEC auf dem Bogen BFC und auf eben dieſen Bogen die Winkel BAC, BDC deren Spitzen in die Peripherie fallen; ſo iſt $\text{BEC} = 2 \text{BAC} = 2 \text{BDC}$.

Beweis.

1) Man ziehe die AE und verlängere ſie bis F, ſo iſt $\text{BEF} = \text{EAB} + \text{EBA}$ (§. 32.), aber $\text{EB} = \text{EA}$, als Halbmesser, daher $\text{EAB} = \text{EBA}$ (§. 5.) und

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EAB} + \text{EBA} \\ \text{BEF} \end{array} \right\} = 2 \text{EAB. Aus demſelben Grunde aber}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EAC} + \text{ECA} \\ \text{FEC (§. 32.)} \end{array} \right\} = 2 \text{EAC (§. 5.)}$$

folglich $\left\{ \begin{array}{l} \text{BEF} + \text{FEC} \\ \text{BEC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{EAB} + 2 \text{EAC} \\ 2 \text{BAC} \end{array} \right\}$

2) Man ziehe die DB und die DE und verlängere ſie nach G, ſo iſt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{GEC} \\ \text{GEB} + \text{BEC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{EDC} + \text{ECD (§. 32.)} \\ 2 \text{EDC (§. 5.)} \\ 2 \text{EDB} + 2 \text{BDC} \end{array} \right\}$$

aber $\text{GEB} = \left\{ \begin{array}{l} \text{EDB} + \text{EBD (§. 32.)} \\ 2 \text{EDB (§. 5.)} \end{array} \right\}$

alſo $\left\{ \begin{array}{l} \text{GEB} + \text{BEC} - \text{GEB} \\ \text{BEC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{EDB} + 2 \text{BDC} - 2 \text{EDB} \\ 2 \text{BDC.} \end{array} \right\}$

Zuſatz.

Zusatz.

Da zwischen zwey Punkten nur *eine* gerade Linie möglich ist, der Winkel aber durch zwey Linien bestimmt wird, die in *einem* Punkte zusammentreffen, so wird der Winkel durch drey Punkte, die nicht in *einer* Linie liegen vollkommen bestimmt; so dafs kein anderer Winkel in diese drey Punkte fallen kann. Auf den beyden Endpunkten eines Bogens kann daher nur *ein* Centriwinkel stehn, da dieser Winkel durch den dritten Punkt, nämlich den Mittelpunkt vollkommen bestimmt ist. Dieser dritte Punkt bleibt hingegen bey Peripheriewinkel zum Theil unbestimmt und daher sind viele Peripheriewinkel auf einem und demselben Bogen möglich.

Alle diese Peripheriewinkel sind aber, wie so eben bewiesen worden ist, die Hälfte des *einen* Centriwinkels der auf *demselben* Bogen steht, sie sind daher auch unter sich alle gleich.

§. 45.

LEHRSATZ.

Die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise sind zwey rechten Winkeln gleich.

Es sey (Fig. 43.) in dem Kreise ABC, die vierseitige ABCD beschrieben; so ist $ADC + ABC = 2R = DAB + DCB$.

Beweis.

Man ziehe die AC, BD, so ist

$$\begin{array}{l} 1) \quad BAC = BDC \text{ (§. 44. Zusatz.)} \\ \text{und} \quad ACB = ADB \end{array}$$

$$\text{folglich} \quad BAC + ACB = \begin{array}{l} \{ BDC + ADB \} \\ \{ \quad ADC. \quad \} \end{array}$$

$$\text{und daher da} \quad ABC = ABC$$

$$\begin{array}{l} \{ ABC + BAC + ACB \} \\ \{ \quad 2R \text{ (§. 31.)} \quad \} \end{array} = ABC + ADC.$$

2)

$$\begin{array}{l} 2) \quad ABC + BAC + ACB = 2 R \\ \quad \quad ADC + DAC + ACD = 2 R \end{array} \quad (\S. 31.)$$

$$\text{also } ABC + ADC + \left[\begin{array}{c} BAC + DAC \\ ADC \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} ACB + ACD \\ DCB \end{array} \right] = 4 R$$

$$\text{aber } ABC + ADC = 2 R \quad (1)$$

$$\text{folglich } ADC + DCB = 2 R.$$

§. 46.

LEHRSATZ.

Der Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers eines Kreises stehn, ist ein rechter Winkel.

Es sey (Fig. 44.) die Linie AB, auf deren Endpunkte A, B, die Schenkel DA, DB des Peripheriewinkels ADB stehn, ein Durchmesser des Kreises ABC, so ist $ADB = R$.

Beweis.

Aus dem Mittelpunkte G ziehe man die GD, so ist, da $GD = GB = GA$, $GBD = GDB$ und $GAD = GDA$, also auch $GBD + GAD = \left[\begin{array}{c} GDB + GDA \\ ADB \end{array} \right]$

$$\frac{ADB}{ADB} = \frac{ADB}{ADB}$$

demnach $ADB + GBD + GAD = 2 ADB$.

Es ist aber $\left[\begin{array}{c} ADB + GBD + GAD \\ 2 ADB \end{array} \right] = 2 R \quad (\S. 31.)$

und mithin $ADB = R$.

LEHRSATZ.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und von dem Berührungspunkte eine gerade Linie an den Kreis geht, welche ihn schneidet; so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie macht, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich.

Es berühre (Fig. 44.) die Linie EF in B den Kreis ABC und es schneide BD den Kreis; so ist DBF dem Winkel im verwechselten Kreisabschnitt BAD, d. h. dem Peripheriewinkel, der auf dem Bogen BCD steht und DBE dem Winkel im verwechselten Kreisabschnitt BCD, d. h. dem Peripheriewinkel, der auf dem Bogen BAD steht, gleich.

Beweis.

Man errichte in dem Punkte B auf der EF die BA lothrecht (§. 10.), nehme in dem Bogen BD nach Willkühr einen Punkt C an und ziehe AD, DC, CB.

1) Da der Mittelpunkt G des Kreises ABC in die Linie AB fällt (§. 43.), so ist AB ein Durchmesser und $\angle ADB = R$ (§. 46.).

Daher ist auch $\angle DAB + \angle DBA = R$, denn

$$\angle DAB + \angle DBA + \left\{ \begin{array}{c} \angle ADB \\ R \end{array} \right\} = 2 R \text{ (§. 31.)}$$

$$\text{und da } \angle ABF = R \text{ (p. constr.)}$$

$$\text{so ist } \angle DAB + \angle DBA = \left\{ \begin{array}{c} \angle ABF \\ \angle DBA + \angle DBF \end{array} \right\}$$

$$\quad \quad \quad - \angle DBA = - \angle DBA$$

$$\text{folglich } \angle DAB = \angle DBF$$

$\angle DAB$ aber ist ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen BCD steht.

$$2) \quad DBF + DBE = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

$$DAB + BCD = 2 R \text{ (§. 45.)}$$

$$\text{mithin} \quad DBF + DBE = DAB + BCD$$

$$\text{aber} \quad DBF = DAB \text{ (1)}$$

$$\text{demnach} \quad DBE = BCD$$

Allein BCD ist ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen BAD steht.

§. 48.

AUFGABE.

Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen Winkel faßt, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Es soll (Fig. 45. 46. 47.) auf der gegebenen Linie AB ein Kreisabschnitt beschrieben werden, der einen Winkel faßt, welcher dem gegebenen Winkel C gleich sey.

Auflösung.

Der gegebene Winkel C ist entweder ein rechter Winkel, oder kleiner, oder gröfser, als ein solcher.

Erster Fall.

Es sey $C = R$ (Fig. 45.)

Man halbire die AB in D (§. 9.) und beschreibe mit der Weite DA den Kreis AEB, so ist AEB ein Kreisabschnitt, der einen rechten Winkel faßt, d. h. der Peripheriewinkel, der auf dem Bogen AHB steht, ist ein rechter Winkel.

Beweis.

Da E der Mittelpunkt des Kreises ist, so ist AB der Durchmesser und daher $AEB = R$ (§. 46.)

I 2

Zweyter

Zweyter Fall.

Es sey $C < R$ (Fig. 46.)

Man setze an A einen Winkel so, daß $BAD = C$ (§. 20.) setze auf A die AE so, daß $EAD = R$ (§. 10.), halbiere die AB in F (§. 9.) und setze auf F das Loth FG (§. 10.) und beschreibe endlich aus G mit der Weite GA den Kreis ABH.

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Da } FG = FG \\ \quad FA = FB \\ \quad GFA = GFB \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} FG \\ FA \\ GFA \end{array}} \right\} \text{(p. constr.)}$$

$$\Delta GFA \cong \Delta GFB \text{ (§. 4.) und } GB = GA.$$

G ist aber der Mittelpunkt, GA der Halbmesser und folglich ist auch GB ein Halbmesser, d. h. B fällt in die Peripherie des Kreises ABH.

Zieht man nun von dem Punkte H, in welchem die Peripherie die Linie AE schneidet die HB, so ist $\left. \begin{array}{l} \angle BAD \\ \angle C \text{ (p. constr.)} \end{array} \right\} = \angle AHB$ (§. 47.) folglich faßt der Kreisabschnitt AHB einen Winkel, der dem gegebenen Winkel C gleich ist.

Dritter Fall.

Es sey $C > R$ (Fig. 47.).

Man setze abermals an AB einen Winkel $DAB = C$ (§. 20.), und auf DA, AE so, daß $DAE = R$ (§. 10.), halbiere die AB in F (§. 9.) und setze auf F ein Loth (§. 10.) welches man unterwärts verlängert, bis es die AE in G schneidet, endlich beschreibe man aus G mit der Weite GA den Kreis ABE.

Beweis.

Da, wie vorhin $AF = BF$, $AFG = BFG = R$ und $\Delta AFG = \Delta BFG$, daher auch $GA = GB$, so fällt also B in die Peripherie.

In

In dem Bogen über AB nehme man willkürlich einen Punkt H an und ziehe HA, HB, so ist $AHB = \left(\begin{smallmatrix} DAB \\ C \text{ (p. constr.)} \end{smallmatrix} \right)$. Mithin faßt der Kreisabschnitt AHB einen Winkel, der dem gegebenen Winkel C gleich ist.

Anmerkung.

Wenn es gleichviel ist, ob der verlangte Kreisabschnitt über oder unter der gegebenen Linie beschrieben werde; so bedarf der letztere Fall keine Erwähnung, denn man braucht statt des stumpfen Winkels nur sein Complement zu $\frac{1}{2} R$ zu nehmen und, da dieß einen spitzen Winkel gibt, wie bey dem zweyten Falle zu verfahren. Denn (Fig. 46.) $AIB = BAK$. Der Bogen AIB faßt daher einen stumpfen Winkel, dessen Complement BAD ist.

Zusatz.

Mit Recht kann man hier den Beweis fodern, daß (Fig. 46.) die FG die Linie AG treffen müsse. Zu diesem Ende wollen wir vorerst die Auflösung der Aufgabe, wie sie hier im 2ten Falle gegeben ist, darauf einschränken, daß der gegebene Winkel $C > \frac{1}{2} R$, denn alsdenn ist $FAE < \frac{1}{2} R$, weil $\left[\begin{smallmatrix} FAD \\ C \text{ (p. constr.)} \end{smallmatrix} \right] + FAE = R \text{ (p. constr.)}$. Macht man nun $FL = FA$, so ist $FAL = \frac{1}{2} R$ (§. 29 Zuf.) und AE fällt zwischen AF und AL und muß daher verlängert die FL schneiden, denn endlich muß sie einmal aus der begrenzten Figur ALF herausgehn und mithin eine der Grenzen berühren, und zwar nothwendigerweise die FL, da sie weder mit AL noch AF, mit welchen beyden sie bereits einen Punkt (A) gemeinschaftlich hat, zusammentreffen kann.

Wäre aber der gegebene Winkel, z. B. (Fig. 46.) $\text{DAI} < \frac{1}{2} R$, so sey doch seine Verdoppelung $\text{DAB} > \frac{1}{2} R$ und die Linie auf der man den Cirkelbogen beschreiben soll, sey AI, so ziehe man von I auf AB die IF lothrecht (§. 11.), mache $\text{FB} = \text{AF}$ und ziehe IB. Auf AB beschreibe man einen Cirkelbogen, der einen Winkel faßt, welcher dem Winkel DAB, der, nach der Construction, $= 2 \text{DAI}$, gleich ist und wie dieß geschehe, ist, da $\text{DAB} > \frac{1}{2} R$ (p. hyp.) befriedigend gezeigt worden. Nothwendig fällt der Punkt I in die Peripherie des solchergestalt gezogenen Kreises AIBH, denn $\text{IAF} + \text{AIF} + \text{AFI} = 2 R$ (§. 30.) und da $\text{IFA} = R$, so ist

$$\text{IAF} + \text{AIF} = R = \left[\begin{array}{l} \text{DAG (p. constr.)} \\ \text{DAI} + \text{IAF} + \text{FAG} \end{array} \right]$$

also $\text{AIF} = \text{DAI} + \text{FAG}$, aber $\text{DAI} = \text{IAF}$ mithin $\text{AIF} = \text{IAF} + \text{FAG} = \text{IAG}$. Also, da FG die gerade Verlängerung von IF ist, $\text{GA} = \text{GI}$ (§. 6.) und demnach ist GI ein Halbmesser dieses Kreises und I fällt in dessen Peripherie. Da nun $\text{ABI} = \text{DAI}$ (§. 47.), so ist auf AI ein Bogen beschrieben worden, der einen Winkel ABI in sich faßt, der dem gegebenen Winkel DAI gleich ist.

Wäre der gegebene Winkel kleiner als $\frac{1}{4} R$, aber doch größer als $\frac{1}{8} R$, so würden wir, da wir nunmehr auf einer jeden Linie einen Bogen zu beschreiben wissen, der das Doppelte dieses gegebenen Winkels faßt, diesen nach der gegebenen Anleitung, so einzurichten im Stande seyn, daß die gegebene Linie eine Sehne dieses Kreises werde und so zwar, daß sie einen Bogen abschneide, der den gegebenen kleinen Winkel in sich fälle.

Wäre

Wäre der gegebene Winkel auch kleiner, als $\frac{1}{8} R$, so wäre er doch gröfser, als $\frac{1}{16} R$ und, wenn das nicht, doch gröfser, als $\frac{1}{32} R$ u. s. f.

Die Anwendung auf stumpfe Winkel, die gröfser als $1\frac{1}{2} R$ sind, ergibt sich von selbst. Man vergleiche die *Anmerkung* zu diesem §.

§. 49.

AUFGABE.

Den Punkt anzugeben, in welchem zwey gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden innern an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte Winkel sind, wenn sie so weit, als nöthig ist, verlängert werden, zusammentreffen.

Es schneide (Fig. 48. 49. 50.) EF die AB, CD so, dass $BEF + DFE < 2 R$ und man soll den Punkt angeben, in welchem die AB, CD auf diese Seite hin verlängert zusammentreffen.

Auflösung.

Man verlängere EF und setze auf F einen Winkel GFH so, dass $GFH = FEI$ (§. 20.), beschreibe sodenn auf EF einen Kreisbogen, der einen Winkel faßt, welcher dem Winkel HFI gleich sey (§. 48.) und verlängere die AE, bis sie den beschriebenen Bogen schneidet; so ist der Punkt, in welchem dieß geschieht, der gesuchte.

Beweis.

$$BEF + DFE < 2 R \text{ (p. hypoth.)}$$

$$GFD + DFE = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

also $GFD + DFE > BEF + DFE$ und $GFD > BEF$, daher ist auch $GFD > GFH$, denn $GFH = BEF$ (p. constr.) und FH fällt zwischen FD, FG.

Der

Der Winkel DFH, der folglich entsteht, ist nun
 1) entweder ein rechter, oder 2) kleiner, oder 3)
 größer, als ein rechter.

Erster Fall.

Es sey (Fig. 48.) $DFH = R$.

1) Wenn $DFH = R$, so ist die Linie EF, auf welcher der Kreisbogen steht, welcher einen ihm gleichen Winkel faßt, der Durchmesser des Kreises (§. 48. Erster Fall.).

$$\begin{aligned} 2) \text{ Da } DFE + DFH + GFH &= 2 R \text{ (§. 12.)} \\ DFH &= R \text{ (p. hypoth.)} \end{aligned}$$

$$\text{so ist } DFE + GFH = R \text{ und } \left(\frac{GFH}{BEF} \right) < R.$$

Man errichte nun auf E das Loth EL (§. 10.); so berührt EL den Kreis EIF und EB fällt in den Kreis (§. 41.).

Die EB muß aber, wenn sie verlängert wird, da dieß unbegrenzt fortgesetzt werden kann, der Kreis aber eine begrenzte Figur ist, auch wieder aus demselben heraus gehn und ihn in irgend einem Punkte I schneiden.

3) Man ziehe nun von I nach F die gerade Linie IF, welche nothwendig in den Kreis fällt (§. 41. Zusatz.), so ist,

$$\text{da } \left(\frac{FEI}{FEB} \right) + EIF + EFI = 2 R \text{ (§. 30.)}$$

$$\text{und } \left(\frac{GFH}{FEB \text{ (p. constr.)}} \right) + \left(\frac{DFH}{EIF \text{ p. constr.}} \right) + EFD = 2 R \text{ (§. 12.)}$$

$$FEB + EIF + EFI = FEB + EIF + EFD \text{ und } EFI = EFD.$$

Es fällt also der Schenkel FD mit dem Schenkel FI zusammen, da die beyden an einerley Seite liegenden gleichen Winkel EFI, EFD den andern Schenkel FE gemeinschaftlich haben.

Die FI ist daher die verlängerte FD und in dem Punkt I trifft auch die verlängerte AB.

Zweyter und dritter Fall.

Es sey (Fig. 49.) $DFH < R$

oder (Fig. 50.) $DFH > R$

Die verlängerte AE liegt in beyden Fällen innerhalb des Kreises EIF. Denn man nehme das Gegentheil an, und es sey die verlängerte AE, Eb.

Fällt nun a) die verlängerte FD in den Kreis und schneidet ihn im I, so ziehe man EI, so fällt EI in den Kreis selbst (§. 41. Zusatz.) und da

$$FEI + EIF + \left(\frac{IFE}{DFE} \right) = 2R \quad (\S. 31.)$$

$$\left(\frac{GFH}{FEb(p. constr.)} \right) + \left(\frac{HFI}{EIF(p. constr.)} \right) + DFE = 2R \quad (\S. 12.)$$

so ist $FEI + EIF + DFE = FEb + EIF + DFE$ und $FEI = FEb$.

Nun haben die gleichen Winkel FEI, FEb, den Schenkel FE gemeinschaftlich und liegen an einerley Seite und haben auch eine gemeinschaftliche Spitze, folglich fallen auch die andern Schenkel zusammen und Eb, EI sind nicht verschieden. Eb fällt also in den Kreis und EI ist die verlängerte AE. Es ist aber eben dadurch auch bewiesen, dass die verlängerten AB, CD in dem Punkte I zusammentreffen.

b) Fiele aber auch FD außer den Kreis, so dass Ed die verlängerte CF wäre. So nehme man in dem beschrie-

beschriebenen Kreisbogen einen Punkt I nach Belieben an und ziehe IE, IF.

Da nun diese Linien in den Kreis fallen (§. 41.), Eb, Fd aber ausserhalb des Kreises seyn sollen, so ist $\angle IEF < \angle bEF$ und $\angle IFE < \angle dFE$ und

$$\angle IEF + \angle IFE + \angle EIF < \angle bEF + \angle dFE + \angle HFG$$

aber $\angle IEF + \angle IFE + \angle EIF = 2R$ (§. 31.) auch $\angle bEF + \angle dFE + \angle HFG = 2R$ (§. 12.) also $2R < 2R$, welches sich widerspricht. Es fällt also die Fd nicht ausserhalb des Kreises und in den Punkt I, wo sie ihn schneidet trifft auch die verlängerte AE (a).

§. 50.

Schlussbemerkung.

Da wir demnach im Stande sind, genau den Platz anzugeben, wo solche Linien, wenn sie verlängert werden, zusammentreffen; so dürfen wir auch, als durch die That bewiesen, behaupten:

Wenn zwey gerade Linien, von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden innern, an einerley Seite der schneidenden liegenden Winkel kleiner als zwey rechte sind; so treffen die beyden geraden Linien, wenn man sie so weit, als nöthig ist, verlängert, an eben der Seite zusammen, an welcher die Winkel liegen, die kleiner, als zwey rechte sind.

Verzeichniß einiger Fehler,

die man vor dem Lesen dieser Schrift zu berichtigen bittet.

Seite 3 in der Note und an vielen andern Stellen
setze $>$ für γ und $<$ für ι

S. 4 Z. 17 von unten lies *Peirard* für *Reirard*.

— 13 — 16 v. u. lies in dem für in den.

— 15 — 1 lies AEF + CFE $>$ ${}_2R$ für AEF + CFA γ ${}_2R$.

— 16 — 15 — der Selbstthätigkeit für Selbstthätigkeit.

— 18 — 9 v. u. lies desiderata für des iderata.

— 19 — 3 lies (Fig. 1. i. Taf. II.) für (Fig. 1. i.)

— 19 — 17 — DOC für DOB.

— — — 20 v. u. lies QP für OP.

— — — 7 v. u. — DO — DC.

— 23 — 1 lies fällt — muß.

— 26 — 3 — an und für sich für an für sich.

— 38 — 5 v. u. lies BCHI für BGHI.

— 39 — 5 lies KBC für KRC.

— 50 — 13 — AB auf DE für AB auf DF.

— 61 §. 18 — überall d statt D.

— 63 Z. 6 — KG statt HG.

— 67 — 12 — GH = DB statt GH = GB.

— 68 — 5 v. u. lies IAC statt IAG.

— 70 — 3 u. 2 v. u. lies lasse von G auf die CD die
GH lothrecht fallen (§. 11.) statt:
setze auf H die HG lothrecht (§. 10.)

— 74 — 6 lies GM für GF.

- S. 74 Z. 8 lies MC für FC.
 — 76 — 3 — $\frac{1}{2}$ BIHC — $\frac{1}{2}$ BIKC.
 — 85 — 17 — $\left\{ \begin{array}{l} \text{BAF} \\ \frac{1}{2} \text{R}(2) \end{array} \right\}$ — $\left\{ \begin{array}{l} \text{BAI} \\ \frac{1}{2} \text{R}(2) \end{array} \right\}$
 — 88 — 11 lies BGF für BGI.
 — 89 — 4 v. u. lies und an HG für und HG.
 — 100 — 2 lies $\equiv$ R; für $\equiv$ R.
 — 106 — 1 — DE — DG.
 — 108 — 3 — RS — PS.
 — 112 — 16 v. u. lies ziehe GM für ziehe GL.

J e n a,

gedruckt bey Carl Wilhelm Theodor Joch.



Schweikart, Ferdinand Karl,

Die Theorie der Parallellinien Nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus
der Geometrie ; mit fünf Kupfertafeln

Jena [u.a.] 1808

Coburg, Landesbibliothek -- Cas A 2837

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11927195-7